

## Die Messung der dynamischen Festigkeit plastischer Werkstoffe.

Von FRANZ X. EDER, Berlin.

(II. Phys. Inst. d. Humboldt-Universität, Berlin.)

Mit 6 Textabbildungen.

(Eingegangen am 25. August 1952.)

### I. Einführung.

Als dynamische Festigkeit eines Stoffes bezeichnet man gewöhnlich die Zerreißfestigkeit, die bei hohen Dehnungsgeschwindigkeiten gemessen wird. Damit erhebt sich sofort die Frage, welche Absolutwerte hierbei einen merklichen Einfluß zeigen. Als Dehnungsgeschwindigkeit  $v$  schlechthin bezeichnet man die zeitliche Ableitung der Dehnung  $\epsilon_0$ , also  $v = d\epsilon_0/dt = d/dt (\lambda/l_0)$ , wenn wir mit  $\lambda$  die Längenänderung der ursprünglichen Länge  $l_0$  bezeichnen. Zieht man die Längenänderung  $\lambda$  auf die jeweilige Länge  $l$ , so bekommt man die wahre oder spez. Dehnungsgeschwindigkeit

$$v' = \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\lambda}{l} \right) = \frac{d\epsilon_0}{dt} \cdot \frac{1}{(1 + \epsilon_0)^2}. \quad (1)$$

Bei der spanlosen Formung (Pressen, Walzen, Ziehen) gewöhnlich auftretenden Verformungsgeschwindigkeiten liegen bei 10 bis 300 sec<sup>-1</sup>. Bei schlagartiger Belastung von Konstruktionsteilen im Fahrzeug- und Motorenbau können sogar wesentlich höhere Werte erreicht werden. Messungen über den Einfluß der Dehnungsgeschwindigkeit auf die Festigkeitswerte innerhalb eines großen Geschwindigkeitsbereiches sind daher sowohl praktisch, als auch für die Theorie der Metallplastizitt von großem Interesse.

Es verlohnt sich festzustellen, daß der hier interessierende Geschwindigkeitsbereich bei der zulässigen Dehnungsgeschwindigkeit statischer Konstruktionen, die bei 0,1 bis 1% in 10 Jahren, also 3 · 10<sup>-12</sup> sec<sup>-1</sup> betragt, beginnt und den beträchtlichen Umfang von 10<sup>9</sup> bis 10<sup>12</sup> sec<sup>-1</sup> umfaßt. (In der Hydrodynamik ändert sich die REYNOLDS-Zahl um höchstens 8 Zehnerpotenzen!).

Die Tatsache, daß die an einem duktilen Metall wirkenden Kräfte beträchtlich zunehmen, wenn man die Deformationsgeschwindigkeit steigert, ist schon lange bekannt. Bereits 1909 leitete LUDWIK [1] aus Versuchsdaten an Zinn bei Dehnungsgeschwindigkeiten zwischen 5 · 10<sup>-9</sup> und 0,05 sec<sup>-1</sup> einen Zusammenhang zwischen Formänderungswiderstand und Geschwindigkeit  $v'$  folgender Art ab:

$$v' = k (a^{\sigma - \sigma_0} - 1) \quad (2)$$

oder nach der Spannung  $\sigma$  aufgelöst:

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{1}{\log a} [\log (k + v') - \log k], \quad (3)$$

wo  $k$  und  $a$  sind Stoffkonstanten.  $\sigma_0$  ist die Spannung, die das Material nach unendlich großer Einwirkungszeit ( $v' = 0$ ) erträgt. Gleichung (2), wonach die Bruchspannung mit dem Logarithmus der Belastungsgeschwindigkeit zunimmt, beschreibt in einem großeren Geschwindigkeitsbereich das Ver-

halten verschiedener duktiler Werkstoffe recht gut. Soweit das die Streckgrenze bei einer gegebenen Dehnung betrifft, kam auch DEUTLER [2], der durch eine theoretische Arbeit von PRANDTL [3] angeregt wurde, zum gleichen Schluß. Er untersuchte Flußeisen und Kupfer bei Dehnungsgeschwindigkeiten zwischen 10<sup>-5</sup> und 10 sec<sup>-1</sup>, wobei für die Auswertung das vollständige Spannungs-Dehnungsdiagramm herangezogen wurde.

Bei der indirekten Methode wird nach PLANK [4] der Probestab durch ein Fallgewicht belastet und die Meßlänge als Funktion der Zeit registriert. Aus der erhaltenen Kurve  $l = f(t)$  wird durch die Ableitung  $d^2l/dt^2$  die Verzögerung der Last und damit die Belastung selbst, aus  $dl/dt$  die Dehnungsgeschwindigkeit graphisch bestimmt.

KÖRBER und STORP [5] fanden für 4 Kohlenstoffstähle, daß bei groeren Dehnungsgeschwindigkeiten von etwa 100 sec<sup>-1</sup> die Bruchspannung um den Faktor 1,15 bis 1,42 und die Bruchdehnung um 1,05 bis 1,12 groer als die entsprechenden Groen bei statischer Belastung waren. HONEGGER [6] untersucht mit dem Pendelschlagwerk weiches Aluminium und Kupfer bei  $v' = 100 \div 160$  sec<sup>-1</sup> und findet Bruchspannungen, die im Mittel um 1,25 bzw. 1,21 und Bruchdehnungen, die 1,23 bzw. 1,17 groer als die statischen Groen waren. Dementsprechend war auch die Trennenergie um 45% bzw. 32% groer als bei statischen Versuchen. WEERTS [7] findet bei dynamisch zerrissenen Al-Einkristallen bei  $v' = 7$  eine um 18% höhere Bruchspannung. Flußstahl mit 0,02% C zeigt nach FINK [8] eine beträchtliche Fliegrenzenberhhung um weit mehr als 100%, wenn diese nach 10<sup>-4</sup> sec erreicht wird.

Eine weitere Steigerung der Dehnungsgeschwindigkeit ist mit Fallwerk oder Pendel kaum mehr zu erzielen. Es sind jedoch eine Reihe von Arbeiten bekannt, in denen die kinetische Energie eines Schwungrades benutzt wird, um den Probestab zu zerreißen, wobei große Dehnungsgeschwindigkeiten erreichbar sind. MANN [9] beschreibt eine rotierende Zerreißmaschine, mit der er bei 300 m/sec Umfangsgeschwindigkeit 25 mm lange Proben mit einer Dehnungsgeschwindigkeit bis zu 3800 untersuchen konnte. Es wurde hierbei die Zerreiarbeit gemessen und zur großen Überraschung festgestellt, daß diese zunächst zunimmt, dann aber oberhalb einer Dehnungsgeschwindigkeit von etwa 1500 bis 2000 wieder abnimmt. Die sehr schnell verlaufende Kraftkurve beim Stoßvorgang wurde in den meisten Fällen mit elastischen Gliedern gemessen, deren Durchbiegung oder Längenänderung optisch registriert wurde. Eine elektrische Kraftmeßvorrichtung mit einem Widerstandsgeber beschreiben CLARK und DÄTWYLER [10].

Umfangreiche Messungen bei verschiedenen Dehngeschwindigkeiten bis zu 900 und in einem Temperaturbereich zwischen 20 und 1000° C sind von MANJOINE und NADAI [11] an Kupfer und Stahl ausgeführt worden, wobei Dehnungs- und Kraftverlauf photoelektrisch gemessen wurden. Die gefundenen Spannungserhöhungen lassen sich befriedigend durch

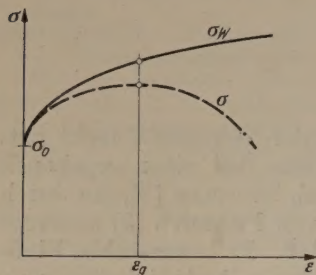


Abb. 1. Spannungs-Dehnungskurve  
 $\sigma_w = \sigma_0 + \sqrt{p \epsilon}$ .

Dehngeschwindigkeit auf die Spannungs-Dehnungskurve metallischer Werkstoffe ist es in den meisten Fällen nicht möglich, die Ergebnisse miteinander zu vergleichen, oder mit ihnen theoretische Überlegungen zu bestätigen. Dazu kommt, daß bei kleinen Deformationsgeschwindigkeiten der zu erwartende Effekt sehr klein wird; bei sehr großen Dehngeschwindigkeiten treten Schwierigkeiten anderer Art auf, die in Abschnitt IV näher betrachtet werden.

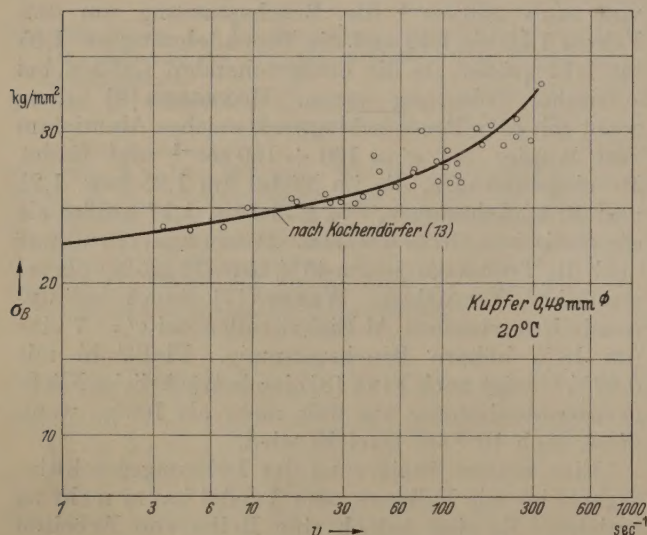


Abb. 2. Einfluß der Dehngeschwindigkeit auf die Festigkeit von Kupfer.

## II. Einfluß der Dehngeschwindigkeit auf die Festigkeitseigenschaften.

Nach den Untersuchungen KOCHENDÖRFERS [12] besitzen die kubischen Metalle im Gegensatz zu den hexagonalen eine physikalisch definierte Streckgrenze  $\sigma_0$ . Des weiteren ergibt sich, daß die wahre Dehnungskurve von der Streckgrenze an etwa parabolförmig verläuft und sich befriedigend durch die Beziehung

$$\sigma_w = \sigma_0 + \sqrt{p \epsilon} \quad (4)$$

beschreiben läßt, wenn  $p$  der sog. Verfestigungsparameter ist. Die gewöhnliche Dehnungskurve, bei der die Belastung auf den Ausgangsquerschnitt be-

zogen wird, ergibt sich daraus zu

$$\sigma = \frac{\sigma_0 + \sqrt{p \epsilon}}{1 + \epsilon}$$

und besitzt bei der sog. Gleichmaßdehnung  $\epsilon_g$  Maximum, wie aus Abb. 1 hervorgeht. Die Leitung von (5) liefert die Gleichmaßdehnung

$$\epsilon_g = 1 - \frac{2 \sigma_0^2}{p} \left( \sqrt{1 + \frac{p}{\sigma_0^2}} - 1 \right).$$

Der Einfluß verschiedener Dehngeschwindigkeiten äußert sich nach den Untersuchungen KOCHDÖRFERS [13] bei beiden Parametern  $p$  und  $\sigma_0$ . Streckgrenze  $\sigma_0$  nimmt mit wachsender Geschwindigkeit entsprechend der Beziehung

$$\sigma_0 = \sigma_{00} \left( 1 - A \sqrt{1 - \frac{\log v'}{B}} \right)$$

in dem hier interessierenden Geschwindigkeitsbereich nur wenig zu. Die Abhängigkeit des Verfestigungsparameters  $p$  wird aus der Gleichung

$$p = p' (1 - C(v') e^{-D(v')})$$

bestimmt, wobei die Funktionen  $C(v')$  und  $D(v')$  gegeben sind durch

$$\log C = \log C_0 - \gamma \log v'$$

$$D = D_1 \sqrt{1 - \frac{\log v'}{\log \alpha}}.$$

$C_0$ ,  $\gamma$ ,  $D_1$  und  $\alpha$  sind Stoffkonstanten. Berechnet man für verschiedene Dehngeschwindigkeiten aus (6) die Gleichmaßdehnung, so sieht man, daß diese mit zunehmender Dehngeschwindigkeit ebenfalls anwächst. Schließlich läßt sich durch Einsetzen von  $\epsilon_g$  in (4) bzw. (5) die gesuchte und experimentell bestimmte Bruchspannung angeben, deren Verlauf in Abb. 2 für Kupfer dargestellt ist. Zum Vergleich sind bis jetzt unveröffentlichte Versuchswerte des Verf., die an 0,48 mm starken Kupferdrähten gewonnen wurden, eingetragen. Diese Versuche wurden mit einer neuartigen Apparatur durchgeführt, bei der die Versuchprobe elektromagnetisch durch einen kurzdauernden starken Stromstoß belastet wurde. Die Last wurde mit Hilfe eines Torsionsstabes, dessen Verdrehung optisch registriert wurde, die Dehnung durch einen Drehspiegel gemessen. Auf dem feststehenden Balken konnte in senkrecht zu einander stehenden Richtungen sofort das Kraft-Dehnungsdiagramm aufgenommen werden, das durch Zeitmarken gekennzeichnet war. Für den Vergleich mit der KOCHDÖRFERSchen Theorie wurden Maximallast und Gleichmaßdehnung unter dem Meßmikroskop gewertet.

Will man die Probenabmessungen, die im vorliegenden Fall 0,48 mm  $\phi$  bei etwa 5 mm Länge betragen, aus Gründen der bequemeren Probenherstellung und -ausmessung vergrößern, so ergeben sich Schwierigkeiten grundsätzlicher Natur, auf die im Folgenden eingegangen werden soll.

## III. Ausbreitung plastischer Wellen im Probestab

Bei mäßigen Dehngeschwindigkeiten ist das oben angegebene Verfahren unbedenklich anzuwenden. Wird die Dehngeschwindigkeit we-

h erhöht, so machen sich alsbald die Trägheitskräfte der Probe selbst bemerkbar, die eine nicht sichförmige Spannungsverteilung längs der Probe verursachen. Die Anwendung des oben angegebenen Auswertungsverfahrens für eine gleichförmige Dehnungsverteilung führt dann zu einem unechten Geschwindigkeitseinfluß auf Dehnung und Bruchspannung, der die wahren Effekte verdecken kann.

Bei den dynamischen Festigkeitsuntersuchungen spielt der zeitliche Verlauf der Zugkraft eine ausschlaggebende Rolle, hängt also von der Masse des bewegten Einspannkopfes bzw. des Schlagpendels ab. Durch ein einfaches Beispiel soll gezeigt werden, daß bei einem Material mit Spannungsverfestigung eine ungleichmäßige Verteilung der Dehnung ein solches Bild der Materialeigenschaften liefert. Es soll ein Werkstoff mit linearer Spannungs-Dehnungskurve entsprechend der Abb. 3 zu Grunde gelegt werden. Da in diesem Zusammenhang nur beträchtliche Dehnungen interessieren, sollen elastische Längenänderungen, die durch Spannungen  $\sigma < \sigma_0$  hervorgerufen werden, vernachlässigt werden.

Ist  $\varepsilon$  die auf die ursprüngliche Länge bezogene Dehnung, zu der die Nennspannung  $\sigma$  gehört, so ist die bei einer differentiellen Längenänderung  $d\varepsilon$  geleistete Arbeit/cm<sup>3</sup>  $\sigma \cdot d\varepsilon$ . In Abb. 4a ist der ungedehnte Probestab, in 4b derselbe bei gleichförmiger Dehnung um den Betrag  $\varepsilon_1$  dargestellt. Die hierzu aufgewendete Energie entspricht der unter der  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurve liegenden Fläche von der Größe  $(\sigma_0 + \sigma_1)/2 \cdot \varepsilon_1$ . Durch eine kurzdauernde Belastung soll die gleiche Probe auf dieselbe Gesamtlänge gedehnt werden, wobei die Dehnung der oberen Hälfte entsprechend einer mittleren Spannung  $\sigma_1$   $2\varepsilon_1$ , für die untere Null betragen soll (Abb. 4c). Die nunmehr im Mittel absorbierte Energie/cm<sup>3</sup> beträgt  $\sigma_1 \cdot \varepsilon_1$  und ist größer als der oben angegebene Betrag. Würde man aus diesem Energiebetrag die Spannungs-Dehnungsbeziehung ableiten, so käme man bei Annahme einer gleichförmigen Dehnung zu einer merklichen Zunahme der Spannung, die fälschlich als Dehnungseffekt ausgelegt werden könnte. Auch ohne die hier gemachten speziellen Annahmen läßt sich ableiten, daß für ein Material mit Spannungsverfestigung jede Abweichung von der gleichförmigen Spannungsverteilung einer Zunahme der absorbierten Energie gleichkommt, wenn die Gesamtdehnung die gleiche ist.

Die strenge Behandlung der Ausbreitung einer elastischen Deformation in Festkörpern stammt von TAYLOR [14] und v. KÁRMÁN [15] und ist in der Folgezeit von einer Reihe von Forschern auf verschiedene Probleme angewandt worden. Legt man die Achse des Probestabes in die X-Richtung und bezeichnet mit  $u$  die Verschiebung eines Querschnitts in Richtung der pos. X-Achse, mit  $F$  den Stabquerschnitt und mit  $\rho$  die Dichte des ungedehnten Materials, so lautet die Bewegungsgleichung eines Stabelementes von der Länge  $dx$ :

$$F \rho dx \frac{d^2 u}{dt^2} = -F \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx. \quad (9)$$

Die Beziehung zwischen  $\sigma$  und  $\varepsilon$  liefert die Substitution

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = - \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{d^2 u}{dx^2}$$

womit Gl. (9) die Form der Wellengleichung

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (10)$$

bekommt, worin

$$c^2 = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\sigma}{d\varepsilon}, \quad (11)$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeit der plastischen Deformation darstellt. Im elastischen Bereich mit  $d\sigma/d\varepsilon = E$  führt (11) zur bekannten Formel für die Schallgeschwindigkeit in festen Stoffen,  $c = (E/\rho)^{1/2}$ .

Da in unserem speziellen Fall  $c = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)^{1/2} = \text{const.}$

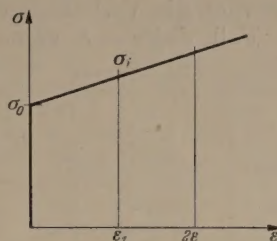


Abb. 3. Spannungs-Dehnungskurve mit linearer Spannungsverfestigung.

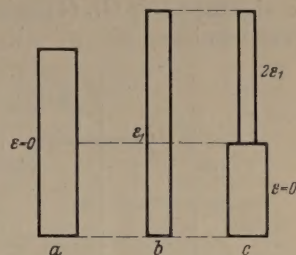


Abb. 4. Statisch und dynamisch deformierter Stab.

ist, lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (10)

$$u = f(x + ct) + F(x - ct), \quad (12)$$

worin  $f$  und  $F$  beliebige Funktionen sind. Daraus lassen sich die Teilchengeschwindigkeit  $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,

die Dehnung  $\varepsilon = -\frac{\partial u}{\partial x}$  und die Spannung  $\sigma = \sigma_0 + \rho c^2 \varepsilon$  ausrechnen.

Betrachten wir zunächst einen langen Stab, der an einem Ende fest eingespannt ist und am anderen Ende durch eine Masse  $M$  mit der Geschwindigkeit  $v_0$  gereckt wird, wie Abb. 5 zeigt. Wegen der idealisierten Spannungs-Dehnungskurve wird sich die elastische Welle mit unendlich großer Geschwindigkeit ausbreiten. Hat die Spannung gleichzeitig im ganzen Stab die Streckgrenze  $\sigma_0$  erreicht, so breitet sich die plastische Deformation mit der konstanten Geschwindigkeit  $c$  aus. Zu irgend einer Zeit  $t$  besitzt daher die stoßende Masse  $M$  und der plastisch verformte Anteil des Stabes  $Fct$  die Geschwindigkeit  $v$ , so daß die Bewegungsgleichung lautet:

$$(M + \rho Fct) \frac{dv}{dt} = -\sigma F. \quad (13)$$

Mit

$$\sigma = \rho c v + \sigma_0 \quad (14)$$

ergibt sich durch Eliminieren von  $\sigma$

$$(M + \rho Fct) \frac{dv}{dt} = -F(\sigma_0 + \rho c v), \quad (15)$$

woraus durch Integration folgt:

$$(\sigma_0 + \rho c v)(M + \rho Fct) = (\sigma_0 + \rho c v_0) M. \quad (16)$$

$v_0$  ist darin die Geschwindigkeit der stoßenden Masse zur Zeit  $t = 0$ . Durch Einsetzen von (14) in (16) erhält man die Verteilung der Spannung hinter der Wellenfront zu

$$\sigma = \frac{\sigma_0 + \varrho c v_0}{1 + \frac{\varrho F x}{M}}, \quad (17)$$

wenn man  $c \cdot t$  durch  $x$  ersetzt. Diese zuerst von LEE und WOLF [16] angegebene Beziehung besagt, daß die Spannung und die Geschwindigkeit hyperbolisch mit zunehmendem Abstand vom gezogenen Ende abnimmt, bis schließlich die Streckgrenze erreicht wird. Für einen Werkstoff, der eine Verfestigung nach Gl. (4) zeigt, werden die Verhältnisse verwickelter, da in diesem Fall  $d\sigma/d\varepsilon = c$  keine

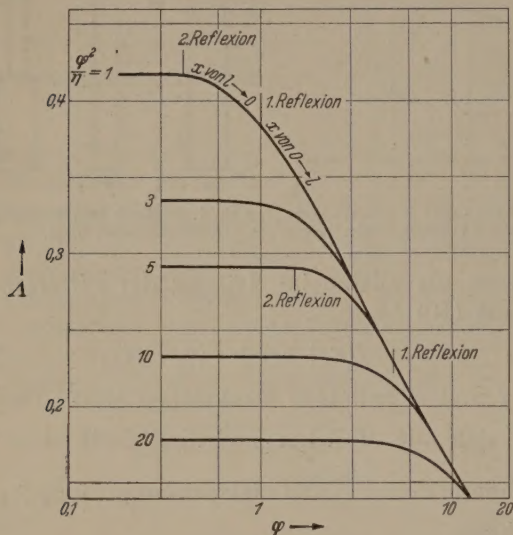


Abb. 6. Gesamtdehnung bei verschiedenen Zuggeschwindigkeiten, aber konstanter Energie.

Konstante ist, sondern eine Dispersion zeigt. Dieser allgemeinere Fall wurde von WHITE und VAN GRIFFIS [17] behandelt, doch liefert auch das einfachere Verfahren für praktische Versuche völlig ausreichende Unterlagen.

#### IV. Einfluß der Stablänge.

Nach dem kurzdauernden Belastungsstoß bleibt im Probestab eine Dehnung zurück, die für jeden Querschnitt eine Funktion der dort aufgetretenen Spannung entsprechend der Beziehung (17) ist. In einem beliebigen Querschnitt bleibt eine Dehnung

$$\varepsilon = \frac{1}{\varrho c^2} (\sigma - \sigma_0) \quad (18)$$

zurück, da die Neigung der Verfestigungskurve  $\varrho c^2$  ist. Ist im Abstand

$$x' = c v_0 M / F \sigma_0 \quad (19)$$

vom bewegten Ende die Spannung  $\sigma = \sigma_0$  geworden, so verschwindet für  $x > x'$  die bleibende Dehnung völlig. Der Ausdruck (19) läßt sich in zwei dimensionslose Größen

$$\eta = \frac{\varrho l F}{M}, \quad (20)$$

das Massenverhältnis von Probestab und Zugkolben, und

$$\varphi = \frac{\varrho c v_0}{\sigma_0}, \quad (21)$$

eine dimensionslose Geschwindigkeit zerlegen, wonach sich die Bedingung für das Auftreten einer plastischen Deformation vereinfacht in

$$\eta < \varphi. \quad (22)$$

Die gesamte Verlängerung des Stabes erhält man durch Integration der Stabdehnung im Bereich  $0 < x \leq x'$ . Aus den Gl. (17), (18), (20) und (21) ergibt sich

$$\lambda = \int_0^{x'} \varepsilon dx = \frac{v_0}{\varrho c} (1 + \varphi) \int_0^{x'} \left( \frac{1}{1 + \frac{\eta}{l} x} - 1 \right) dx = \frac{v_0 l}{\eta c} \left[ \left( \frac{1 + \varphi}{\varphi} \right) \ln(1 + \varphi) - 1 \right]. \quad (23)$$

Mit zunehmender Geschwindigkeit  $\varphi$  nimmt die Gesamtdehnung sehr rasch nach Gl. (23) ab. Um  $\lambda$  Beziehung zur anfänglichen Energie  $E$  des Zugkolbens setzen zu können, bilden wir

$$E = \frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{l \cdot F \cdot \sigma_0^2}{2 c^2 \varrho} \cdot \frac{\varphi^2}{\eta} \quad (24)$$

und können den Ausdruck (24) in den nur Stoffwert und geometrische Größen enthaltenden 1. Term einer dimensionslosen Energiegröße  $\varphi^2/\eta$  zerlegen. Führen wir außerdem die ebenfalls dimensionslose Dilatation

$$\Delta = \frac{\lambda}{l} \frac{\sigma_0 F \cdot l}{2 E} \quad (25)$$

ein, so wird aus der Gl. (23)

$$\Delta = \frac{(1 + \varphi) \ln(1 + \varphi) - 1}{\varphi^2}. \quad (26)$$

Überträgt man also durch einen Kolben gleiche kinetischer Energie, aber verschiedener Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  auf den Probestab einen kurz dauernden Impuls, so verringert sich mit wachsender  $v_0$  die Gesamtdehnung, die außerdem umgekehrt proportional der Streckgrenze  $\sigma_0$  wird. Die Beziehung (26) gilt allerdings nur, solange  $x'$  kleiner als die Stablänge ist.

Wird nun auf Grund der Versuchsbedingungen  $x' = \frac{2 E c}{F \sigma_0 v_0}$  größer als  $l$ , so wird die plastische Welle am festen Stabende reflektiert. Während der Reflexion sinkt die Spannung am Stabende, die z. B.  $\sigma_1$  (vgl. Abb. 3) betragen hat, weit unterhalb  $\sigma_0$ , wobei die plastische Dehnung  $\varepsilon_1$  erhalten bleibt. Nach Reflexion der Welle am festen Stabende ist aber in die weiterhin geltende Gl. (17) an Stelle von  $\sigma_0$ , der Streckgrenze des unverformten Materials, der Wert  $\sigma_1$  einzusetzen. Es addieren sich daher für die zurücklaufende Welle die beiden Spannungen, deren Summe über die Stablänge konstant wird. Wie nicht im einzelnen nachgewiesen werden soll, tritt nun an Stelle der Beziehung (26) für die Gesamtdehnung des Stabes der Ausdruck

$$\Delta = (1 + \varphi) \left\{ \frac{2 \eta}{\varphi^2} \left( \frac{1}{1 + \eta} - \frac{1}{1 + \varphi} \right) - \frac{1}{\varphi^2} \ln \left( \frac{2}{1 + \eta} - \frac{1}{1 + \varphi} \right) + \frac{1}{\varphi^2} \left( \frac{2}{1 + \eta} - \frac{1}{1 + \varphi} - 1 \right) \right\} \quad (27)$$

der in den Grenzen  $l > x'' > 0$  gilt. In der Abb. sind für verschiedene Energiewerte  $E$  des Zug-

ens die Gesamtdehnungskurven als Funktion Stoßgeschwindigkeit  $\varphi$  aufgetragen und die nzen der Gültigkeit der Beziehungen (26) und (27) etragen. Man ersieht daraus, daß der Stab nur n gleichförmig gedehnt wird, wenn die plastische le gerade das freie Stabende (bei  $x = 0$ ) erreicht. es Ergebnis zeigt, daß der Einfluß der Dehnungs- eilung im allgemeinen klein ist, wenn die tische Welle wieder an den Stoßort zurückkehrt, : von großer Bedeutung ist, wenn diese bereits rend des ersten Durchlaufes aufhört.

Will man diese Überlegungen auf die Auswertung amischer Dehnung- und Zerreißversuche an- den, so ist zu beachten, daß man in praktischen en weder eine scharfe Streckgrenze, noch kon- te Verfestigung vorfindet. Die Ausbreitungs- hwindigkeit der plastischen Deformation ist nicht mehr eine Konstante, sondern zeigt je h Art der Beanspruchung eine große Dispersion. den meisten Fällen wird man jedoch auf diese feinerung verzichten können, da sich bei duk- n Stoffen die dynamischen Untersuchungen meist Gebiet großer Relativdehnung abspielen.

#### Zusammenfassung.

Ausgehend von den theoretischen Beziehungen r den Einfluß der Dehnungsgeschwindigkeit auf Festigkeitseigenschaften von Metallen, wird auf

die Bedeutung der Versuchsbedingungen für eine unverfälschte Messung dieser Effekte hingewiesen. An Hand der Vorstellung von plastischen Wellen läßt sich berechnen, daß die Abweichung der Spannungsverteilung vom quasistatischen Fall mit zunehmender Stoßgeschwindigkeit und kleiner werden- der Zugkolbenmasse immer größer wird. Sollen Irr- tümer bei der Auswertung von dynamischen Festig- keitsuntersuchungen vermieden werden, muß der Spannungsverlauf nach dem Versuch ajs den blei- benden Dehnungen rekonstruiert werden.

**Literatur.** [1] LUDWIK, P.: Phys. Z. **10**, 411 (1909). — [2] DEUTLER, H.: Phys. Z. **23**, 247 (1932). — [3] PRANDTL, L.: Z. angew. Math. Mech. **8**, 85 (1928). — [4] PLANK, R.: Z. VDI **56**, 17, 24, 46, 51 (1912). — [5] KÖRBER, F. und STORP, H.: Mitt. KWI Eisenforsch. **7**, 81 (1925). — [6] HONEGGER, E.: Ber. Eidgenöss. Materialprüf.-Anst. Zürich **11**, (1935). — [7] WEERTS, J.: Diss. Berlin (1928). — [8] FINK, K.: Schweiz. Arch. **15**, 193 (1949). — [9] MANN, H. C.: ASTM **36**, 85 (1936). — [10] CLARK, D. C. und DÄTWYLER, G.: Proc. ASTM **38**, 98 (1938). — [11] MANJOINE, M. und NADAI, A.: J. appl. Mechan. **8**, 77 (1941). — [12] KOCHENDÖRFER, A.: Plast. Eigensch. v. Krist. u. metall. Werkst., Berlin 1941. — [13] KOCHENDÖRFER, A.: Met.-Forsch. **11**, 173 (1947). — [14] TAYLOR, G. I.: Brit. Off. Rep. RC 329 (1942). — [15] KÁRMÁN, TH. v.: NDRC Rep. Nr. A-29 (1942). — [16] LEE, E. H. und WOLF, H.: J. appl. Mechan. **18**, 379 (1951). — [17] WHITE, M. P. und GRIFFIS, L. v.: J. appl. Mechan. Trans. ASME **69**, 337 (1947).

Prof. Dr.-Ing. FRANZ EDER,  
Berlin-Grünau, Regattastr. 244.

## Einige spezielle Einschalt- und Ausgleichvorgänge in Supraleitern.

Von LOTHAR A. KÖNIG und GERHARD U. SCHUBERT<sup>1</sup>, Mainz.

(Eingegangen am 11. September 1952.)

### 1. Einleitung.

In seiner ersten Arbeit über die Erweiterung LONDONSchen Theorie der Supraleitung hat LAUE [1] den Ausgleich von Raumladungen im raleiter untersucht. Einschalt- und Ausgleich- gänge, die beim Anlegen eines homogenen Magnet- es an einen supraleitenden unendlichen Halb- m auftreten, hat der eine von uns [2] nach der IDON-v. LAUESchen (phänomenologischen) Theorie andelt. Dabei wurde auch schon die Frage ge- ift, wie diese Ausgleichvorgänge bei Berück- tigung der Trägheit der den OHMSchen Strom- enden Elektronen verlaufen. Die Trägheit der uschen Elektronen ist in den LONDON-v. LAUE- n Gleichungen nicht mitenthalten. Bei ihrer ücksichtigung lauten die Grundgleichungen für isch kristallisierende Metalle im GAUSSschen System mit  $\mu = 1$  und konstantem, skalarem  $\varepsilon$  [2]):

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{J} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \quad (\text{II})$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \varrho, \quad (\text{IV})$$

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_n + \mathfrak{J}_s, \quad (\text{Va})$$

Es werden in der vorliegenden Arbeit die Ergebnisse Diplomarbeit von L. A. KÖNIG mitverwendet.

$$\varrho = \varrho_n + \varrho_s, \quad (\text{Vb})$$

$$\frac{\partial \varrho_n}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{J}_n = 0. \quad (\text{VIa})$$

$$\frac{\partial \varrho_s}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{J}_s = 0, \quad (\text{VIb})$$

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\sigma} \mathfrak{J}_n + \frac{\partial (\lambda \mathfrak{J}_n)}{\partial t}, \quad (\text{VII})$$

$$\mathfrak{E} = \frac{\partial (\lambda \mathfrak{J}_s)}{\partial t}, \quad (\text{VIII})$$

$$\mathfrak{H} = -c \operatorname{rot} (\lambda \mathfrak{J}_s). \quad (\text{IX})$$

$\lambda$  ist eine neu eingeführte Größe, welche als 2. cha- rakteristische Konstante neben  $\lambda$  tritt. Das Glied  $\partial (\lambda \mathfrak{J}_n) / \partial t$  in (VII) tritt in den v. LAUESchen Gleich- ungen nicht auf. Selbst wenn man annimmt, daß  $\lambda$  um zwei Zehnerpotenzen kleiner ist als  $\lambda$ , eine An- nahme, die wir hier auch manchmal machen werden, wenn es sich darum handelt Formeln zahlenmäßig auszuwerten, darf man das erwähnte Glied nicht so ohne weiteres unterdrücken, weil es ja gerade die zeitlich rasch veränderlichen Vorgänge sind, bei denen der OHMSche Strommechanismus wirksam wird. Dies soll an einigen speziellen Fällen un- tersucht werden. Dabei sind wir uns bewußt, daß bei sehr rasch verlaufenden Vorgängen die Anwendung der einfachen phänomenologischen Gleichungen (VII) bis (IX) unter Umständen fragwürdig ist. Jedoch zu einer qualitativen Orientierung wird die phänomeno- logische Theorie brauchbar sein, vor allem dann, wenn man die lineare Theorie voraussetzt, wie wir

es hier tun wollen, indem wir so schwache Felder, Ströme, Ladungen betrachten, daß eine nichtlineare Theorie linearisiert werden kann. Zur weiteren Vereinfachung nehmen wir  $A$  und  $\lambda$  als wirkliche Konstante an. Es sei noch angemerkt, daß der im folgenden nicht explizit benutzte Energiesatz im Falle  $\partial\lambda/\partial t = \partial A/\partial t = 0$  so lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{8\pi} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2) + \frac{1}{2} (\lambda \mathcal{S}_s^2 + A \mathcal{S}_n^2) \right] + \frac{1}{\sigma} \mathcal{S}_n^2 + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} (\mathcal{E} \times \mathcal{H}) = 0. \quad (X)$$

## 2. Ausgleich von Raumladungen.

Sei zur Zeit  $t = 0$  eine Raumladungsverteilung  $\varrho_0(x, y, z)$  gegeben. Diese kann man sich z.B. durch Beschluß eines Supraleiters mit Elektronen erzeugen denken (vgl. eine Arbeit von MEISSNER und STEINER [3], die langsame Elektronen auf eine supraleitende Zinnfolie auftreffen ließen).

Setzt man in (VII)  $\mathcal{S}_n = \mathcal{S} - \mathcal{S}_s$ , differenziert nach  $t$ , benützt (VIII) so folgt nach Divergenzbildung

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} + \frac{1}{\sigma A} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{\varepsilon} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{A} \right) \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{4\pi}{\varepsilon \sigma \lambda A} \varrho = 0. \quad (1)$$

Durch ähnliche Eliminationen erhält man:

$$\frac{\partial^2 \varrho_n}{\partial t^2} + \frac{1}{\sigma A} \frac{\partial \varrho_n}{\partial t} + \frac{4\pi}{\varepsilon A} (\varrho_n + \varrho_s) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \varrho_s}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{\varepsilon \lambda} (\varrho_n + \varrho_s) = 0. \quad (3)$$

Die Gleichung (1) hat unter der genannten Anfangsbedingung die Lösung

$$\varrho = \varrho_0(x, y, z) \left\{ \begin{aligned} & \{ a_1(x, y, z) e^{-\alpha_1 t} + a_2(x, y, z) e^{-\alpha_2 t} \\ & + [1 - a_1(x, y, z) - a_2(x, y, z)] e^{-\alpha_3 t} \}. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Dabei sind  $a_1$  und  $a_2$  Integrationsortsfunktionen.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sind die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$\alpha^3 - \frac{1}{\sigma A} \alpha^2 + \frac{4\pi}{\varepsilon} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{A} \right) \alpha - \frac{4\pi}{\varepsilon \sigma \lambda A} = 0. \quad (5)$$

Dieselbe Gleichung erhält man auch, wenn man in (2) und (3) mit den Ansätzen  $\varrho_n = P_n(x, y, z) e^{-\alpha t}$ ,  $\varrho_s = P_s(x, y, z) e^{-\alpha t}$  eingeht und die Lösbarkeitsbedingung für die homogenen linearen Gleichungen anschreibt. Aus dieser Bedingungsgleichung erhält man übrigens noch die Wurzel  $\alpha_4 = 0$ , was der Lösung  $\varrho = 0$ ,  $\varrho_n = -\varrho_s = \text{const}$  entspricht. Als neue Integrationsortsfunktionen erscheinen dann nach Berücksichtigung der erwähnten linearen Gleichungen  $P_{n,s}(x, y, z)$  entsprechend  $\alpha_{1,2,3}$  und  $\alpha_4 = 0$ . Seien zur Zeit  $t = 0$   $\varrho_n$ ,  $\varrho_s$ ,  $\mathcal{S}_n$  und  $\mathcal{S}_s$  (damit auch  $\operatorname{div} \mathcal{S}_n$  und  $\operatorname{div} \mathcal{S}_s$ , was nach (VIa, b) auch die Kenntnis von  $\dot{\varrho}_n$  und  $\dot{\varrho}_s$  nach sich zieht) als Ortsfunktionen bekannt. Man hat somit genügend Gleichungen zur Bestimmung der  $P_{n,s}$ .

Hier interessieren wir uns aber nur für die Relaxationszeiten  $\tau_v = 1/\Re(\alpha_v)$  ( $v = 1, 2, 3$ ). Es genügt also die Wurzeln der kubischen Gleichung (5) zu diskutieren.

Mit

$$p = \frac{4\pi}{3\varepsilon A} \left( 1 + \frac{A}{\lambda} - \frac{\varepsilon}{12\pi\sigma^2 A} \right),$$

$$q = \frac{2\pi}{3\varepsilon\sigma A^2} \left( 1 - 2\frac{A}{\lambda} - \frac{\varepsilon}{18\pi\sigma^2 A} \right)$$

und

$$u = \sqrt[3]{p^3 + q^2 - q}, \quad v = -\sqrt[3]{p^3 + q^2 + q}$$

werden

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= u + v + \frac{1}{3\sigma A}, \\ \alpha_2 &= -\frac{u+v}{2} + \frac{1}{3\sigma A} + i(u-v)\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \alpha_3 &= -\frac{u+v}{2} + \frac{1}{3\sigma A} - i(u-v)\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \right\}$$

Die Eindringtiefe eines homogenen Magnetfelds in einen supraleitenden Halbraum ist bekanntlich

$\delta = \sqrt{\lambda c^2 / 4\pi}$ . Die Temperatur liege so weit unter dem Sprungpunkt, daß die Eindringtiefe nur wenig von derjenigen am absoluten Nullpunkt verschieden ist. Sie hat (für Sn und Pb) die Größenordnung  $5 \cdot 10^{-6}$  cm (vgl. LONDON [4] S. 46). Also  $\lambda \approx 3,5 \cdot 10^{-31}$  sec<sup>2</sup>. Eine genaue Angabe von  $\sigma$  ist nicht ohne weiteres möglich, weil  $\sigma$  sicher von der Leitfähigkeit dicht oberhalb des Sprungpunktes verschieden ist. Für  $\sigma \lambda$  wird man aber ungefähr die Größenordnung  $10^{-12}$  sec annehmen dürfen (vgl. LONDON [4] S. 31). Sicher kann man  $\sigma \gg \lambda$  schätzen. Nach der Beschleunigungstheorie (vgl. v. LAUE [1]) von BECKER, HELLER und SAUTER

$$\lambda = \frac{m}{e^2 N},$$

wobei  $m$  die Masse und  $e$  die Ladung eines Elektrons ist, während  $N$  die Zahl der Supraleitungselektronen im ccm bedeutet. Die Herleitung dieser Beziehung erfolgte klassisch. Das Elektron wird als geladener Massenpunkt aufgefaßt. Um nun in Einklang mit den gemessenen Werten  $\lambda_{exp}$  zu kommen, kann man eine effektive Elektronendichte einführen:  $n_{eff} = \frac{N}{e^2 \lambda_{exp}}$ .

Man steckt sozusagen die Quantentheorie der Supraleitung, die in endgültiger Form noch gar nicht existiert, in diesen Faktor. (Den von FRÖHLICH benutzten wichtigen Begriff der scheinbaren Masse wollen wir hier aus Bequemlichkeit nicht verwenden.) Vergleicht man nun das aus den gemessenen Werten der Eindringtiefe errechnete  $n_{eff}$  mit der Dichte der freien Metallelektronen, dann stellt man fest, daß  $n_{eff}$  etwa eine Zehnerpotenz kleiner als  $n_F$  ist. Der Schluß, daß die meisten Elektronen nicht zur Supraleitung beitragen und demnach OHMSche Elektronen sind, macht die Annahme  $\lambda \ll \delta$  zu einem plausiblen Grenzfall, weil für  $\lambda$  eine (7) entsprechende Beziehung (klassisch) hergeleitet wird. Da es aber nur um effektive Dichten handelt, ist dieser Schluß solange nicht zwingend als  $\lambda$  und  $A$  nicht wirklich quantentheoretisch berechnet werden können.

Unter den Voraussetzungen  $\varepsilon = 1$ ,  $\sigma \gg \lambda^{-1/2}$ ,  $\lambda \ll \delta$  werden die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sigma \lambda}, \quad \alpha_{2,3} = \frac{1}{2\sigma A} \pm i \sqrt{\frac{4\pi}{A}}.$$

$\tau_1 = \sigma \lambda$  ist die sich aus den v. LAUESchen Formeln für  $\sigma \gg \lambda^{-1/2}$  ergebende Relaxationszeit, welche die Größenordnung  $10^{-12}$  sec hat (siehe oben unsere Annahme über  $\sigma$ ). Das FOURIERSpektrum einer Funktion  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ ,  $f(t) = \exp(-t/\tau)$  für  $t > 0$  mit  $\tau = 10^{-12}$  sec hat eine Halbwertsfrequenz

$\cdot 10^{11}$  Hz (für  $\varepsilon = 1$  ist die zugehörige Wellenlänge 0,17 cm). Die phänomenologische Theorie ist wohl noch anwendbar. Dagegen ergibt sich aus v. LAUESchen Theorie, d. h. mit  $\Lambda = 0$ , eine Relaxationszeit  $1/(4\pi\sigma) \sim 10^{-19}$  sec. Für so schnellverlaufende Vorgänge gilt die Theorie aber nicht mehr. Hier wird jedoch  $\tau_2 = 2\sigma\Lambda$ . Nimmt man als untere Grenze  $\Lambda \approx \lambda/50$  an, dann ist die zweite Relaxationszeit immer noch in ein phänomenologisches Gebiet vielleicht zugängliches Gebiet ( $\tau_2 \approx 4 \cdot 10^{-14}$  sec). Der Imaginärteil  $\alpha_{2,3}$  liefert für  $\Lambda = \lambda/50 \approx 7 \cdot 10^{-33}$  sec<sup>2</sup> und  $\lambda = 17 \cdot 10^{15}$  Hz, so daß die Anwendung unserer Theorie ohne weiteres zulässig ist. Sie hat aber immerhin den Vorzug gegenüber der früheren, daß die Relaxationszeit  $\tau_2$  eine plausible Größenordnung bekommt<sup>1</sup>.

Läßt man die Annahme  $\Lambda \ll \lambda$  fallen, so hat man die exakten Formeln (6) anzuwenden, wobei allerdings die Abschätzung  $\sigma \gg \lambda^{-1/2}$  eine gewisse Vereinfachung erlaubt. Wir wollen nur noch einen einfachen Spezialfall, nämlich  $\Lambda = \lambda$  erwähnen. Hier werden die Relaxationszeiten  $\tau_1 = 2\sigma\lambda$  und  $\tau_2 = 4\sigma\lambda$ . Man wird annehmen können, daß die Fälle  $\Lambda \ll \lambda$  und  $\Lambda = \lambda$  Grenzfälle sind, so daß die Relaxationszeiten in den Bereichen

$$\sigma\lambda \leq \tau_1 \leq 2\sigma\lambda, \quad 2\sigma\lambda \leq \tau_2 \leq 4\sigma\lambda,$$

gen.

### 3. Einschalten eines Magnetfeldes.

Man betrachte einen supraleitenden unendlichen Raum, der an Vakuum oder Luft grenzt. Die  $x$ -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems sei die Grenzfläche. Der Supraleiter erstreckt sich in Richtung der positiven  $x$ -Achse.

Gesucht werden strenge Lösungen der MAXWELLSchen Gleichungen im Außenraum und der Gleichungen (I)–(IX) im Supraleiter, die für  $x = 0$  den bekannten Stetigkeitsbedingungen genügen und für  $x \rightarrow \infty$  in ein homogenes Magnetfeld  $\mathfrak{H} = \{H_x = 0; H_y = H_0; H_z = 0\}$ ,  $\mathfrak{E} = 0$  übergehen. Derartige Lösungen hat der eine von uns [2] im Falle der Abhängigkeitslosigkeit der OHMSchen Elektronen angegeben. Diese Untersuchungen sollen hier auf den Fall  $\Lambda \neq 0$  ausgedehnt werden.

Zunächst eine Bemerkung über die Feldgleichungen im Supraleiter. Ebenso wie man aus den MAXWELLSchen Gleichungen alle Feldvektoren bis auf eine eliminieren kann, um die Wellengleichung zu gewinnen, läßt sich aus (I)–(IX) eine verallgemeinerte „Telegraphengleichung“ herleiten, der die Vektoren der Felder und Ströme genügen müssen:

Sei  $W$  der Operator

$$= \left\{ \left( 1 + \sigma\Lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \text{rot rot} + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left( 1 + \frac{\Lambda}{\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{c^2\lambda} \right\}, \quad (7)$$

ann gilt:

$$W(\mathfrak{H}) = 0, \quad (7a)$$

<sup>1</sup> Für einen Normalleiter wird bei Berücksichtigung der Elektronenträgheit  $\alpha = 1/(2\sigma\Lambda) \pm i\sqrt{4\pi/(\Lambda c)} - 1/(2\sigma\Lambda)^2$ , was für  $\sigma \gg \lambda^{-1/2}$  mit den obigen Werten für  $\alpha_{2,3}$  formal übereinstimmt. Natürlich haben  $\sigma$  und  $\Lambda$  hier andere Werte.

$$W(\mathfrak{E}) = 0, \quad (7b)$$

$$W(\mathfrak{J}_n) = 0, \quad (7c)$$

$$W(\mathfrak{J}_s) = 0. \quad (7d)$$

Aus (7b) kann man durch Divergenzbildung sofort (1) erhalten. Für  $\Lambda = 0$  ergibt sich aus (7) bis (7d) die von v. LAUE angegebene Gleichung; für  $\lambda \rightarrow \infty$  folgt die für einen Normalleiter mit Berücksichtigung der Elektronenträgheit gültige Gleichung, welche für  $\Lambda \rightarrow 0$  in die übliche Telegraphengleichung übergeht.

Die Raumladungen im Supraleiter seien ausgeglichen, so daß neben  $\mathfrak{H}$  auch  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{J}_{n,s}$  quellenfrei sind. Aus dem Operator rot rot wird dann  $-\Delta$ . Man betrachte im Außenraum (Index  $a$ ) eine linear polarisierte Welle, welche die Gestalt einer sich mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung wachsender  $x$  (Index 1) bewegenden Stufe hat:

$$\left. \begin{aligned} H_x = H_z = E_x = E_y = 0 \\ H_y = H_{a1} = \begin{cases} 0 & (x > ct) \\ \frac{H_0}{2} & (x \leq ct) \end{cases} \\ E_z = E_{a1} = \begin{cases} 0 & (x > ct) \\ -\frac{H_0}{2} & (x \leq ct) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$x < 0$

(8) ist eine spezielle Lösung der MAXWELLSchen Gleichungen. Wir werden später zeigen, daß diese Welle nach ihrer Reflexion am Supraleiter (Index 1) zu einem homogenen Magnetfeld führt. Durch Überlagerung zeitlich infinitesimal gegeneinander verschobener Wellen vom Typ (8) mit infinitesimal kleiner Sprunghöhe lassen sich allgemeinere Wellenformen erzeugen, so daß es zunächst genügt, das Verhalten der Welle (8) nach der Reflexion des Wellenkopfes und ihre Wirkung auf den Supraleiter zu untersuchen.

Die Zeitachse ist so eingerichtet, daß der Wellenkopf zur Zeit  $t = 0$  die Grenzfläche erreicht. Für  $t < 0$  haben wir nur für  $x \leq ct$  von Null verschiedene Felder. Für  $t \geq 0$  setzen wir an:

$$\left. \begin{aligned} H_x = H_z = E_x = E_y = 0 \quad (x \text{ und } t \text{ beliebig}) \\ H_y = H_a = H_{a1} + H_{a2} \\ E_z = E_a = E_{a1} + E_{a2} \end{aligned} \right\} (x < 0, \quad t \geq 0) \quad (9)$$

$H_y = H_s \quad E_z = E_s \quad (x > 0, \quad t \geq 0).$

Für die Grenzfläche  $x = 0$  muß gelten:

$$H_a = H_s \quad E_a = E_s \quad \text{für alle } t \geq 0. \quad (10)$$

Dabei genügen  $H_{a2}$  und  $E_{a2}$  beide der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \varphi = H_{a2} \quad \text{oder} \quad E_{a2}. \quad (11)$$

$H_s$  und  $E_s$  sind Lösungen der aus (7) folgenden Gleichung (mit  $\varepsilon = 1$ ):

$$\left\{ \left( 1 + \sigma\Lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left( 1 + \frac{\Lambda}{\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial t} - \beta^2 \right\} \varphi = 0 \quad (12)$$

$\varphi = H_s \quad \text{oder} \quad E_s.$

Ferner ist nach (I), (VII) und (VIII):

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (x \text{ beliebig}) \quad (13)$$

$$J_{nz} = J_{ny} = J_{sx} = J_{sy} = 0 \quad (x \geq 0) \quad (14)$$

$$\sigma E_s = \left(1 + \sigma A \frac{\partial}{\partial t}\right) J_{nz} \quad (x \geq 0) \quad (15)$$

$$E_s = \lambda \frac{\partial J_{sz}}{\partial t} \quad (x \geq 0). \quad (16)$$

Statt der Funktionen  $H_{a1,2}$ ,  $E_{a1,2}$ ,  $H_s$ ,  $E_s$ ,  $J_{nz}$ ,  $J_{sz}$  von  $x$  und  $t$  führen wir deren LAPLACE-Transformierte nach der Zeit ein (kleine Buchstaben):

$$\varphi(x, p) = L\{\Phi(x, t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} \Phi(x, t) dt \quad (17)$$

$$\Phi = H_{a1,2}, \dots \quad \varphi = h_{a1,2}, \dots$$

Die Umkehrformel ist:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, t) &= L^{-1}\{\varphi(x, p)\} \\ &= H.W. \frac{1}{2\pi i} \int_{P-i\infty}^{P+i\infty} e^{pt} \varphi(x, p) dp \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

*H.W.* bedeutet CAUCHYScher Hauptwert,  $P$  ist größer als die Konvergenzabszisse von (17). Mathematische Einzelheiten siehe z. B. DOETSCH [5]. Nach bekannten Regeln (vgl. [6]) wird aus (8)–(16) durch LAPLACE-Transformationen nach der Zeit:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2} \varphi = 0 \quad \varphi = h_{a2}, e_{a2} \quad (x \leq 0), \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{1}{c^2(1 + \sigma A p)} \left[ \sigma A p^3 + p^2 \right. \\ \left. + 4\pi\sigma \left(1 + \frac{A}{\lambda}\right) p + \frac{4\pi}{\lambda} \right] \varphi = 0 \quad (x \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\varphi = h_s, e_s, j_{nz}, j_{sz},$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{de_z}{dx} &= \frac{p}{c} h_y, \quad e_z = e_{a1,2}, \quad h_y = h_{a1,2} \quad (x \leq 0); \\ e_z &= e_s, \quad h_y = h_s \quad (x \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$j_{nz} = \frac{\sigma}{1 + \sigma A p} e_s \quad (x \geq 0) \quad (22)$$

$$j_{sz} = \frac{1}{\lambda p} e_s \quad (x \geq 0) \quad (23)$$

$$h_{a1} = \frac{1}{2p} H_0 \quad (x = 0) \quad (24)$$

$$e_{a1} = -\frac{1}{2p} H_0 \quad (x = 0) \quad (25)$$

$$\frac{1}{2p} H_0 + h_{a2}(0, p) = h_s(0, p) \quad (26)$$

$$-\frac{1}{2p} H_0 + e_{a2}(0, p) = e_s(0, p). \quad (27)$$

Die Lösungen von (19) und (20) sind:

$$\varphi = C_1(p) \exp\left(\frac{px}{c}\right) + D_1(p) \exp\left(-\frac{px}{c}\right) \quad (28)$$

$$\varphi = C_2(p) \exp\left(A(p) \frac{x}{c}\right) + D_2(p) \exp\left(-A(p) \frac{x}{c}\right) \quad (29)$$

$$A(p) = + \sqrt{\frac{(p + \alpha_1)(p + \alpha_2)(p + \alpha_3)}{p + 1/\lambda\sigma}}.$$

Dabei sind die  $\alpha_i$  die Wurzeln (6) der kubischen Gleichung (5). Man hat nun  $e_{a2}$  in der Gestalt (28) und  $e_s$  in der Form (29) anzusetzen und die zugehörigen  $h$  aus (21) zu berechnen. Wie eine genauere

Analyse zeigt müssen die Funktionen  $D_1(p)$  und  $C_2(p)$  identisch gleich Null gesetzt werden. Zur Bestimmung von  $C_1(p)$  und  $D_2(p)$  dienen (26) und (27) (22) und (23) liefern sodann die LAPLACE-Transformierten der Ströme. Schließlich hat man alle Funktionen mittels (18) rückzutransformieren, was wir symbolisch durch  $L^{-1}$  andeuten. Somit ist:

$$H_s = H_0 L^{-1} \left\{ \frac{A(p)}{p[p + A(p)]} \exp\left(-A(p) \frac{x}{c}\right) \right\} \quad (x \geq 0) \quad (30)$$

$$H_a = H_{a1} + H_{a2} \quad (x \leq 0) \quad (31)$$

(Dabei ist  $H_{a1}$  durch (8) gegeben)

$$H_{a2} = -\frac{1}{2} H_0 L^{-1} \left\{ \frac{p - A(p)}{p[p + A(p)]} \exp\left(\frac{px}{c}\right) \right\} \quad (x \leq 0) \quad (32)$$

$$E_s = -H_0 L^{-1} \left\{ [p + A(p)]^{-1} \exp\left(-A(p) \frac{x}{c}\right) \right\} \quad (x \geq 0) \quad (33)$$

$$E_a = E_{a1} + E_{a2} \quad E_{a2} = H_{a2} \quad (x \leq 0) \quad (34)$$

( $E_{a1}$  ist durch (8) gegeben)

$$J_{nz} = -\sigma H_0 L^{-1} \left\{ (1 + \sigma A p)^{-1} [p + A(p)]^{-1} \exp\left(-A(p) \frac{x}{c}\right) \right\} \quad (x \geq 0) \quad (35)$$

$$J_{sz} = -\frac{1}{\lambda} H_0 L^{-1} \left\{ p^{-1} [p + A(p)]^{-1} \exp\left(-A(p) \frac{x}{c}\right) \right\} \quad (x \geq 0). \quad (36)$$

Dies ist (vgl. (18)) eine Darstellung der Lösung durch Integrale in der komplexen  $p$ -Ebene. Wir haben jetzt nur noch das Verhalten von (30)–(36) für  $t \rightarrow \infty$  zu untersuchen um die Brauchbarkeit der Lösung zu beweisen. Dazu zeigt man zuerst, was wir im einzelnen hier nicht wiedergeben wollen, daß die Integrale (30) usw. für  $t \rightarrow \infty$  konvergieren. Es genügt zu wissen, daß sie konvergieren, was natürlich physikalisch vernünftig ist. Dann kann man nämlich folgenden mathematischen Satz (vgl. [5] S. 20) benützen: Sei  $\varphi(p) = L\{\Phi(t)\}$ . Existieren die Grenzwerte von  $p \cdot \varphi(p)$  für  $p \rightarrow 0$  ( $|\arg p| < \frac{\pi}{2}$ ) und

von  $\Phi(t)$  für  $t \rightarrow \infty$ , dann stimmen die beiden Grenzwerte überein. So erhalten wir in einfacher Weise

$$H_{a2} \rightarrow H_0/2, \quad E_{a2} \rightarrow H_0/2 \quad \text{für } t \rightarrow \infty \text{ und alle } x \leq 0 \quad (37)$$

Aus (8) folgt

$$H_{a1} \rightarrow H_0/2, \quad E_{a1} \rightarrow -H_0/2 \quad \text{für } t \rightarrow \infty \text{ und alle } x \leq 0. \quad (38)$$

Also ist der Grenzzustand  $t \rightarrow \infty$  im Außenraum tatsächlich  $\xi = \{0, H_0, 0\}$ ,  $\mathcal{E} = 0$ . Für den supraleitenden unendlichen Halbraum ergibt sich die bekannte stationäre Strom- und Feldverteilung

$$\left. \begin{aligned} H_s &\rightarrow H_0 e^{-\beta x}, \quad J_{sz} \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} H_0 e^{-\beta x}, \\ E_s, J_{nz} &\rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty \text{ und alle } x \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Der Übergang zum Normalleiter wird durch den Grenzübergang  $\lambda \rightarrow \infty$  in (30) usw. bewerkstelligt und führt nach dem erwähnten Satz für  $p \rightarrow 0$  zum physikalisch richtigen Ergebnis:

$$\left. \begin{aligned} H_s &\rightarrow H_0, \quad E_s, J_{nz}, J_{sz} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty \\ &\text{und alle } x \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Es interessiert noch die Frage nach welchen Funktionen diese Grenzwerte erreicht werden. Ihrer Beantwortung müssen die Integrale (3) usw.

ymptotisch für  $t \rightarrow \infty$  entwickelt werden. Dazu rdendie Integrationswege in der komplexen  $p$ -Ebene eignet deformiert (vgl. [2]). Vorher werden die ngularitäten der Integranden (Pole, Verzweigungs- nitte) aufgesucht und die Verzweigungsschnitte ssend gelegt. Auf die ziemlich umfangreichen echnungen soll hier nicht weiter eingegangen wen- n. Physikalisch wichtig ist nur das Ergebnis. Wir reiben den Suprastrom an:

$$\left. \begin{aligned} z &\approx \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\lambda}} e^{-\beta x} - \Phi_1(x, t) e^{-\frac{t}{\sigma\lambda}} \\ &- \frac{\text{const}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{2\sigma\lambda}} \cos\left(\sqrt{\frac{4\pi}{\lambda}}(t + \text{const})\right) \dots \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$(\sigma \gg \lambda^{-1/2}, \lambda \gg \lambda, x \ll ct, t \gg \sqrt{\lambda}).$$

ist eine gegenüber den Exponentialfunktion lang- m veränderliche Funktion. Es treten hier also die- lben Abklingfunktionen auf wie beim Ausgleich on Raumladungen. Es erscheinen wieder die Re- laxationszeiten  $\sigma\lambda$  und  $2\sigma\lambda$ . Analoges gilt für die rigen Feldgrößen bringt also physikalisch nichts esentlich neues. Den Grenzübergang  $\lambda \rightarrow \infty$  darf an in den asymptotischen Reihen nicht vollziehen. an muß in den Integralen  $\lambda \rightarrow \infty$  gehen lassen und ann gesondert asymptotisch entwickeln. Es treten tzt für beliebige  $\lambda$  Abklingfunktionen  $t^{-1/2}, t^{-3/2}$  auf. n Gegensatz zum Supraleiter findet man hier also bklingvorgänge  $t^{-1/2}, t^{-3/2}, \dots$ , die sehr viel lang- mer verlaufen als die durch die  $e$ -Funktionen dar- estellten. Das ist deshalb einleuchtend, weil hier das agnetfeld ins gesamte Innere des Leiters vordringt und deshalb große Ströme induziert werden, wäh- nd der Supraleiter bis auf eine schmale Randzone raktisch feldfrei bleibt.

Betrachtet man statt der Sprungfunktion ein all- mähliches Anwachsen des Magnetfeldes auf  $H_0$ , dann hat man, wie oben schon gesagt, Sprungwellen zu superponieren, was aber zu keinen neuen Relaxa- tionsvorgängen Anlaß gibt, so daß wir auf die Be- handlung des allgemeineren Falles verzichten wollen.

### Zusammenfassung.

Die LONDON- v. LAUESchen Gleichungen der phä- nomenologischen (linearen) Theorie der Supraleitung werden um ein Glied erweitert, das der Trägheit der den OHMSchen Strom tragenden Elektronen be- rücksichtigt. Dies hat zur Folge, daß sich bei Aus- gleichvorgängen infolge Raumladungen oder Ein- schaltens eines Magnetfeldes andere (längere) Re- laxationszeiten als nach früheren Überlegungen von v. LAUE und von einem von uns ergeben. In diesen älteren Arbeiten trat eine so kurze Relaxationszeit auf, daß die Anwendbarkeit der phänomenologischen Theorie in Frage gestellt worden war. Nach unseren Rechnungen muß man, wenn man solche Relaxa- tionsvorgänge überhaupt phänomenologisch behan- deln will, die Trägheit der OHMSchen Elektronen be- rücksichtigen.

**Literatur.** [1] v. LAUE, M.: Theorie der Spupraleitung, Springer Berlin 1949. — [2] SCHUBERT, G. U.: Ann. d. Phys. (VI) 5, 213 (1949). — [3] MEISSNER, W. u. K. STEI- NER: Z. f. Phys. 76, 201 (1932). — [4] LONDON, F.: Super- fluids Vol. I (Macroscopic Theory of Superconductivity), Verlag J. Wiley, New York 1950. — [5] DOETSCH, G.: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Springer Berlin 1937.

LOTHAR KÖNIG und Prof. Dr. G. SCHUBERT,  
Institut für theoretische Physik  
der Universität Mainz.

## Zur Absorption von Elektronen und Positronen\*.

Von L. KOESTER, H. MAIER-LEIBNITZ und K. SCHMEISER, Heidelberg.

Mit 3 Textabbildungen.

(Eingegangen am 21. August 1952.)

Seit man weiß [1] [2] [3] [4], daß die Einzel- kreuung von Positronen an Atomkernen im Ein- lang mit der theoretischen Erwartung [5] weniger äufig ist als die der Elektronen, und vor allem nach- em sich gezeigt hat [6], daß das auch für die Rück- kreuung gilt, mußte man auch Unterschiede in der raktischen Reichweite und Absorption beider eilchenarten erwarten. Diese Frage ist von prak- ischem Interesse, weil man häufig aus der Ab- orption von Betastrahlen auf ihre Energie schließt der umgekehrt bei bekannten Betastrahlern die bsorption in verschiedenen Materialien zu kennen ünscht. Wir haben aus diesem praktischen Grund ie Absorption von Positronen- und Elektronen- pektren radioaktiver Isotope verglichen in An- ordnungen, wie sie bei den üblichen Messungen an sotopen verwendet werden. Unabhängig von unse- er Messung haben BASKOVA und DZELEPOV [7] Unterschiede in der Absorption für homogene Posi- ron und Elektronen gefunden.

Wir haben bei unseren Versuchen zweierlei Ab- sorptionsmessungen in etwas verschiedenen An- ordnungen gemacht: a) Vergleich der Positronen und Elektronen von  $\text{Cu}^{64}$ , b) Vergleich des Positronen- strahlers  $\text{N}^{13}$  mit dem Elektronenstrahler  $\text{Na}^{24}$ .

a)  $\text{Cu}^{64}$ .  $\text{Cu}^{64}$  ist für einen Vergleich der Absorp- tion geeignet, weil die Spektren der Elektronen und Positronen gut bekannt sind und sich in der Energie wenig unterscheiden. Die Grenze [8] liegt bei 0,571 MeV für Elektronen und 0,657 MeV für Posi- tron; beide Spektren haben erlaubte Form, was be- deutet, daß sie für unsere Zwecke genügend ähnlich sind.

Die Absorption beider Spektren wurde in einer Magnetfeldanordnung (siehe Abb. 1 unten links) ver- glichen, die eine Trennung der Positronen und Elektronen erlaubt, ohne daß eine wesentliche spek- trale Zerlegung für die Teilchen eines Vorzeichens eintritt. Das Magnetfeld wurde etwa auf maximale Ausschlagszahl im Zählrohr (methandurchströmtes Proportionalzählrohr [9] mit großem Fenster von 0,01 mm Cu) eingestellt und für die Positronen gegen- über den Elektronen um das Verhältnis der  $H_0$ -Werte

\* Die Resultate dieser Mitteilung wurden vorgetragen auf der Tagung der Physikalischen Gesellschaft Württem- berg-Baden-Pfalz im April 1952.

der Spektren vergrößert, um möglichst gleiche Geometrie für beide Messungen zu haben.

Als Absorber dienten Aluminium- und Goldbleche. Die Ergebnisse zeigt Abb. 1; Nulleffekt und Gammastrahlung sind dabei abgezogen. Die Absorptionskurven in Aluminium lassen sich durch

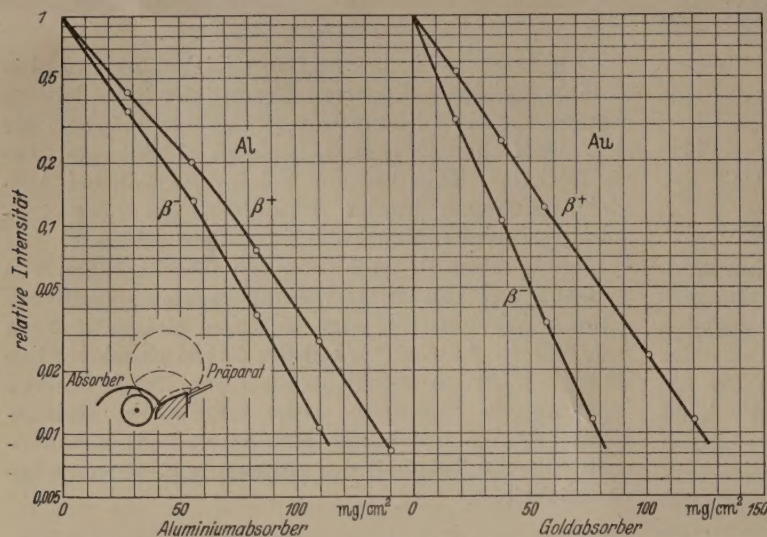


Abb. 1. Absorption der Positronen und Elektronen von  $\text{Cu}^{64}$  in Aluminium und Gold. Links unten Schema der verwendeten Anordnung.

Multiplikation der Abszissen der Elektronenkurve mit dem Faktor 1,22 ineinander überführen. Das ist praktisch der Faktor 1,20, den man durch Anwendung der FEATHER-FLAMMERSFELDSchen Beziehung für das Verhältnis der Reichweiten zweier Betaspektren der Grenzenergie 0,657 und 0,571 MeV berechnet. Für Aluminium besteht also, auch in der Form der Absorptionskurve kein merklicher Unterschied der Ab-

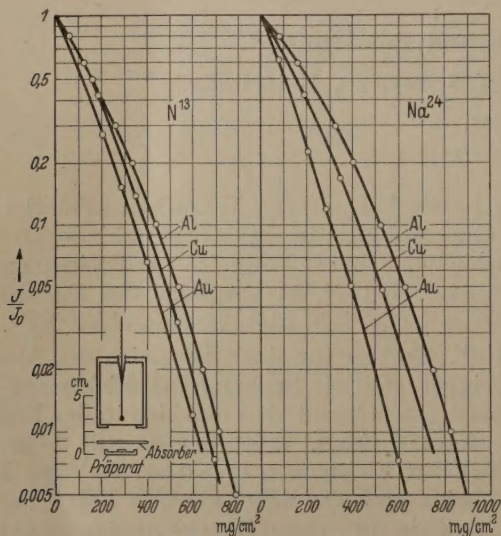


Abb. 2. Absorption der Positronen von  $\text{N}^{13}$  und der Elektronen von  $\text{Na}^{24}$  in Aluminium, Kupfer und Gold. Schema der verwendeten Anordnung links unten.

sorption und Reichweite von Positronen und Elektronen.

Ganz anders ist das Ergebnis bei Gold. Die Absorptionskurve für Positronen fällt besonders an ihrem Anfang gegenüber der der Elektronen wesentlich langsamer ab als man nach dem Energieverhältnis erwartet. Das Verhältnis der Abszissen der Positronen- zur Elektronenkurve ist 1,80 bei 0,5 der

Anfangsintensität und nimmt langsam ab bis zu 1,58 bei 0,02 der Anfangsintensität. Reduziert man wieder mit Hilfe der FEATHERSchen Beziehung auf gleiche Energie, so erhält man als Ergebnis: Die Positronen von  $\text{Cu}^{64}$  werden in Gold erst in dickere Schichten absorbiert als gleichschnelle Elektronen und zwar um den Faktor 1,5 bei Absorption auf die Hälfte der Anfangsintensität und um den Faktor 1,32 bei Absorption auf 0,02.

b)  $\text{N}^{13}$  und  $\text{Na}^{24}$ . Auf das Resultat bei  $\text{Cu}^{64}$  hin wurden noch die ebenfalls ihre Grenze (1,25 bzw. 1,39 MeV [10] [11]) und ihrer Verteilung (erlaubtes Spektrum nach gut bekannten Strahler  $\text{N}^{13}$  (Positronen) und  $\text{Na}^{24}$  (Elektronen)) verglichen. Die Anordnung war eine in einer laufenden Untersuchung verwendete Standardanordnung zur Messung von Beta- und Gammastrahlen. Das Zählrohr war wieder ein methandurchströmtes Proportionalzählrohr, mit dem in kurzer Zeit große statistische Genauigkeit der Messung erreicht werden kann. Die Präparate stammten vom Heidelberger Zyklotron.

Als Absorber dienten wieder Aluminium und Gold, außerdem noch Kupfer. Die Anordnung (Abb. 2 links unten) liefert Absorptionskurven, die stärker als exponentiell abfallen. Die Präparate wurden in dünner Schicht auf stets gleichen Unterlagen von Filterpapier über Aluminium gemessen.

Die Meßergebnisse (ohne Nulleffekt und Gammastrahlung) zeigt Abb. 2. Wieder lassen sich die Absorptionskurven in Aluminium durch Multiplikation mit einem Faktor 0,85, der praktisch gleich dem aus der FEATHERSchen Beziehung folgenden 0,88 ineinander überführen. In Gold sind Positronen wieder weniger absorbiert als gleichschnelle Elektronen, und zwar ist der Schichtdicken-Faktor 1,5 bei Absorption auf 0,2 und 1,26 bei Absorption auf 0,02. Bei Kupfer besteht ebenfalls ein deutlicher Unterschied in der Absorption von Positronen in der gleichen Richtung wie bei Gold. Die entsprechenden Zahlen sind 1,13 und 1,11.

### Diskussion.

Bei dem beobachteten Unterschied in der Absorption von Positronen und Elektronen muß es sich um einen Einfluß der Kernstreuung um große Winkel handeln. Denn von den drei Faktoren, die die Diffusion und Absorption von Betastrahlung bestimmen: Energieverlust, Kleinwinkelstreuung um große Winkel, ist nur beim letzten ein Unterschied zwischen positiven und negativen Teilchen nach der Theorie zu erwarten. (Ein zweiter Unterschied, beim Stoß mit großer Energieübertragung auf Elektronen, hat mindestens bei schweren Kernen keine praktische Bedeutung.) Man hat also in unserem Experiment die interessante Möglichkeit, den Einfluß der Kernstreuung um große Winkel auf die Diffusion zu studieren, indem nur diese eine Größe geändert wird, während die anderen gleich bleiben.

Eine obere Grenze für den Einfluß der Kernung können wir erhalten, indem wir den Energieverlust vernachlässigen und dann als Maß die Diffusion den Transportquerschnitt

$$\sigma_t = \int_0^\pi \sigma(\vartheta) (1 - \cos \vartheta) d\omega$$

rechnen, wo  $\sigma(\vartheta)d\omega$  die Wahrscheinlichkeit der Streuung an einem Atomkern um den Winkel  $\vartheta$  in das Raumwinkelement  $d\omega$  ist. Für Diffusionsgänge, bei denen Winkeländerungen der Größenordnung  $90^\circ$  wahrscheinlich sind, also bei nicht zu dünnen Absorbern, kann man die tatsächliche Diffusion wie die an homogen nach allen Richtungen streuenden Zentren mit dem totalen Wirkungsquerschnitt  $\sigma_t$  betrachten.

Für  $\sigma(\vartheta)$  hat man zu setzen

$$\sigma(\vartheta) = \frac{Z^2 e^4}{4 m^2 v^4 \sin^4 \vartheta/2} \cdot q(\vartheta) \cdot r(\vartheta),$$

der erste Faktor die relativistische RUTHERFORD-Formel darstellt ( $eZ$  = Kernladung,  $m$  = bewegte Masse,  $v$  = Geschwindigkeit).  $q(\vartheta)$  beschreibt die Abschirmung des Kerns durch die Hüllenelektronen und läßt sich schreiben

$$q(\vartheta) = \frac{\vartheta^4}{(\vartheta^2 + \vartheta_a^2)^2},$$

wo  $\vartheta_a$  eine von  $Z$  und  $v/c$  abhängige Konstante ist, die bei MOLIERE angegeben ist [12].  $r(\vartheta)$  ist das, für Positronen und Elektronen verschiedene, Verhältnis zwischen der nach der MOTTSchen Formel berechneten Streuung und der RUTHERFORD-Formel.  $r(\vartheta)$  geht für kleine Winkel gegen eins, während  $q(\vartheta)$  für alle Winkel gleich eins ist.

MASSEY [5] hat numerische Werte für  $r(\vartheta)$  für Positronen und Elektronen von 0,65 MeV und angegeben, was einigermassen dem Fall des von uns untersuchten Goldes entspricht, zumal die Energieabhängigkeit von  $r(\vartheta)$  nicht sehr groß ist. Damit sind in Abb. 3 die Werte der Integrale

$$\int_0^\Theta \sigma(\vartheta) (1 - \cos \vartheta) 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$$

für die RUTHERFORD-Streuung, für Positronen und für Elektronen berechnet. Der Endwert bei  $\Theta = \pi$  ist der jeweilige Transportquerschnitt. Man erkennt den relativ geringen Einfluß der Kleinwinkelstreuung (Vielfachstreuung) auf diesen Querschnitt. Für Elektronen ist der Transportquerschnitt um den Faktor 1,5 größer als für Positronen.

Das beobachtete Verhältnis der Reichweiten von Positronen und Elektronen kommt diesem Faktor nahe. Wir möchten das als einen Beweis betrachten, daß in der Tat bei der Diffusion von Elektronen in schweren Elementen die Streuung um kleine Winkel ausschlaggebend ist.

Daß der Energieverlust der Elektronen erst in einer Linie (auf jeden Fall natürlich bei großen Vorberdicken) eine Rolle spielt, muß man erwarten, und die aus dem Energieverlust  $\text{pro g/cm}^2$  berechnete

wahre Reichweite in Gold wesentlich größer ist als die aus den obigen Transportquerschnitten berechneten Transportweglängen. Dies wird ganz anders bei leichten Elementen wie Aluminium, wo die Transportweglänge und die wahre Reichweite von derselben Größenordnung sind und damit der Einfluß der wahren Reichweite überwiegt. Damit wird erklärbar, daß wir bei Aluminium keinen deutlichen Unterschied

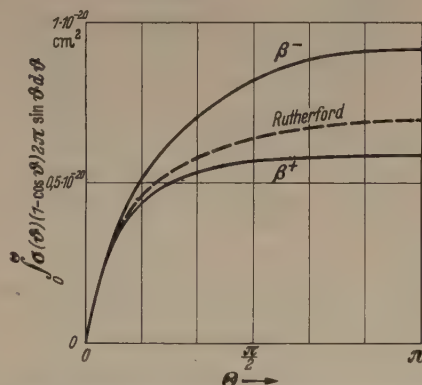


Abb. 3. Zur Berechnung des Transportquerschnitts für Elektronen und Positronen von 0,65 MeV in Quecksilber. Zum Vergleich Berechnung nach der Rutherford'schen Streuformel für dieselbe Energie (mit Abschirmung).

in der Absorption der Positronen und Elektronen finden, obwohl die Theorie für die Einzelstreuung noch etwa den halben Effekt von Kupfer vorhersagt; auch der Anteil der Kleinwinkelstreuung am Transportquerschnitt ist für leichte Elemente wesentlich größer als für schwere.

### Zusammenfassung.

Absorptionsmessungen mit üblichen Zählrohranordnungen an Positronen- und Elektronenstrahlern zeigen, daß die Absorption der Positronen in Aluminium gleich, in Kupfer und Gold aber deutlich geringer ist als die von Elektronen gleicher Energie. Der Effekt ist in Übereinstimmung mit einer einfachen Theorie, bei der der Einfluß der für Positronen und Elektronen verschiedenen Kernstreuung auf die Diffusion mit Hilfe des Transportquerschnitts angegeben wird.

**Literatur.** [1] FOWLER, W. A. u. J. OPPENHEIMER: Physic. Rev. **54**, 320 (1938). — [2] LASICH, W. B.: Austral. J. Sci. **A 1**, 249 (1948). — [3] HOWATSON, A. F. u. J. R. ATKINSON: Philos. Mag. J. Sci. **42**, 1136 (1951). — [4] LIPKIN, H. J.: Physic. Rev. **85**, 517 (1952). — [5] MASSEY, H. W. S.: Proc. Roy. Soc. London **A 181**, 14 (1942). — [6] SELIGER, H. H.: Physic. Rev. **78**, 491 (1950). — [7] BASKOVA, K. A. u. B. S. DZELEPOV: Dokl. Akad. Nauk UdSSR **77**, 1001 (1951). — [8] COOK, C. S. u. L. M. LANGER: Physic. Rev. **73**, 601 (1948). — [9] KOESTER, L. u. H. MAIER-LEIBNITZ: S.-B. Heidelberger Akad. Wiss., math.-naturwiss. Kl. Nr. 5, 283 (1951). — [10] COOK, C. S., L. M. LANGER, H. C. PRICE u. M. B. SAMPSON: Physic. Rev. **74**, 127 (1948). — [11] SIEGBAHN, K.: Physic. Rev. **70**, 127 (1946). [12] MOLIERE, G.: Z. Naturforsch. **2a**, 133 (1947).

Dipl. phys. LOTHAR KOESTER,  
Prof. Dr. H. MAIER-LEIBNITZ, Dr. KURT SCHMEISER,  
Institut für Physik im Max Planck-Institut  
für medizinische Forschung, Heidelberg.

## Zur Theorie der gemischten Halbleiter.

Von O. MADELUNG und H. WELKER, Erlangen.

Mit 3 Textabbildungen.

(Eingegangen am 16. August 1952.)

Durch die Entdeckung des Transistors ist die technische Bedeutung der Halbleiter in den letzten Jahren stark gewachsen. Gleichzeitig damit ist der Typ des *gemischten* Halbleiters wichtig geworden. Hierunter wird der Halbleitertyp verstanden, in dem der Strom von Elektronen und Defektelektronen (Löchern) nebeneinander getragen wird, bei welchem also nicht, wie bei reinen Störstellenleitern, nur eine Art von Ladungsträgern am Stromtransport beteiligt ist.

Die Elektronen- bzw. Löcherdichten und die Beweglichkeiten in Störstellenhalbleitern lassen sich durch Messung der spezifischen Leitfähigkeit und des HALL-Koeffizienten bestimmen. Für einen *reinen* Überschuß- bzw. Defektleiter gilt bekanntlich:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= e n \mu_n & \sigma_0 &= e p \mu_p \\ R &= -\frac{3\pi}{8} \frac{1}{e n c} & R &= \frac{3\pi}{8} \frac{1}{e p c} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wo  $\mu_n$  und  $\mu_p$  die Beweglichkeit der Elektronen und Löcher und  $n$  und  $p$  ihre Dichten bedeuten. Aus (1) folgt dann:

$$\left. \begin{aligned} n &= -\frac{3\pi}{8} \frac{1}{e R c} & p &= \frac{3\pi}{8} \frac{1}{e R c} \\ \mu_n &= -\sigma_0 R \frac{8c}{3\pi} & \mu_p &= \sigma_0 R \frac{8c}{3\pi} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Schwieriger gestaltet sich die Bestimmung der Dichten und der Beweglichkeiten in gemischten Halbleitern. In den Gleichungen für  $\sigma_0$  und  $R$  treten dann beide Dichten und beide Beweglichkeiten auf [1]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= e(\mu_n n + \mu_p p) \\ R &= -\frac{3\pi}{8ec} \frac{\mu_n^2 n - \mu_p^2 p}{(\mu_n n + \mu_p p)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die beiden Gleichungen (3) reichen hier nicht mehr aus, um die vier Unbekannten  $n$ ,  $p$ ,  $\mu_n$ ,  $\mu_p$  zu bestimmen. Sind die Beweglichkeiten bekannt, so genügt natürlich (3) zur Bestimmung der Dichten. Sind aber diese nicht bekannt oder sucht man nach einer zweiten unabhängigen Bestimmungsmöglichkeit, so sind zwei weitere Messungen notwendig, die Beziehungen zwischen den gesuchten Dichten und Beweglichkeiten geben. Hierfür kann man zum Beispiel die *magnetische Widerstandsänderung*  $\Delta\varrho/\varrho_H$  und die *Thermokraft*  $\varphi_{ab}$  dienen.

Man besitzt dann vier Gleichungen zur Bestimmung der vier gesuchten Größen und kann diese durch Elimination bestimmen. Ist andererseits die Breite der verbotenen Zone zwischen dem Valenzband und dem Leitungsband  $\Delta E$  bekannt, so genügen wegen

$$\left. \begin{aligned} n p &= n_0 p_0 e^{-\Delta E/kT} \\ n_0 &= 2 \left( \frac{2\pi m_n k T}{h^2} \right)^{3/2} & p_0 &= 2 \left( \frac{2\pi m_p k T}{h^2} \right)^{3/2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

drei Messungen.

Die Beziehungen zwischen  $\Delta\varrho/\varrho_H$  bzw.  $\varphi_{ab}$  und den gesuchten Dichten und Beweglichkeiten lassen sich für isotrope Halbleiter leicht aus der Elektronentheorie der Metalle gewinnen. FRÖHLICH [2] führt die Ableitung nur für den Fall des Eigenhalbleiters ( $n=p$ ) durch und gewinnt die Formeln für die reinen Störstellenhalbleiter daraus durch Nullsetzen von  $\mu_p$  bzw.  $\mu_n$ . Für das Zwischengebiet der gemischten Halbleiter lassen sich die gesuchten Gleichungen ebenfalls aus den FRÖHLICHschen Ausgangsformeln gewinnen. Wir stellen diese nochmals für alle vier Bestimmungsgrößen  $\sigma_0$ ,  $R$ ,  $\Delta\varrho/\varrho_H$ ,  $\varphi_{ab}$  zusammen:

$$\left. \begin{aligned} \text{spezifische Leitfähigkeit (ohne Magnetfeld):} & \quad \sigma_0 = \frac{4e^2}{3m} L_0 \\ \text{spezifische Leitfähigkeit (mit Magnetfeld } \vec{H} \perp \vec{i} \text{):} & \quad \sigma_H = \frac{4e^2}{3m} \frac{K_1^2 + K_2^2}{K_1} \\ \text{HALL-Koeffizient:} & \quad R = \frac{3m}{4e^2 H} \frac{K_2}{K_1^2 + K_2^2} \\ \text{magn. Widerstandsänderung:} & \quad \frac{\Delta\varrho}{\varrho_H} = -\frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = \frac{K_1^2 + K_2^2}{K_1 L_0} - 1 \\ \text{Thermokraft:} & \quad \varphi_{ab} = -\frac{1}{eT} \left( \frac{L_1}{L_0} - \zeta \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{wo } L_0 &= \frac{3}{4} (\bar{\tau}_1 F_1 n_1 + \bar{\tau}_2 F_2 n_2) \\ L_1 &= \frac{3}{4} (E_1 \bar{\tau}_1 F_1 n_1 + E_2 \bar{\tau}_2 F_2 n_2) \\ K_1 &= \frac{3}{4} \left( \bar{\tau}_1 F_1 n_1 + \bar{\tau}_2 F_2 n_2 - \left( \frac{eH}{mc} \right)^2 (\bar{\tau}_1^3 F_1^3 n_1 + \bar{\tau}_2^3 F_2^3 n_2) \right) \\ K_2 &= -\frac{3}{4} \left( \frac{eH}{mc} \right) (-\bar{\tau}_1^2 F_1^2 n_1 + \bar{\tau}_2^2 F_2^2 n_2) \end{aligned} \right\}$$

und  $\bar{\tau}$  der Mittelwert der Relaxationszeit,  $F$  der Trag der Freiheitszahl,  $E$  die Energie des Bandrandes,  $n$  die Teilchendichte und  $e$  (im Gegensatz zur FRÖHLICHschen Darstellung) den Betrag der Elektronenladung  $|e|$  bedeuten. Die Indizes 1 bzw. 2 beziehen sich auf das Valenzband (Löcher) bzw. das Leitungsband (Elektronen).

Führt man die Beweglichkeiten durch  $\mu = \frac{e}{m} \bar{\tau}$  ein und setzt  $n_1 = p$ ,  $n_2 = n$ , so findet man mit den Beziehungen

$$\bar{\tau}^3 = \frac{3\pi}{8} \bar{\tau}^2 \quad \bar{\tau}^3 = \frac{9\pi}{16} \tau^3$$

unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung in  $(H/c)$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= e(\mu_n n + \mu_p p) \\ R &= -\frac{3\pi}{8ec} \frac{\mu_n^2 n - \mu_p^2 p}{(\mu_n n + \mu_p p)^2} \\ \frac{\Delta\varrho}{\varrho_H} &= \left( \frac{3\pi}{8} \right)^2 \left( \frac{H}{c} \right)^2 \left\{ \frac{4}{\pi} \frac{\mu_n^3 n + \mu_p^3 p}{\mu_n n + \mu_p p} - \left( \frac{\mu_n^2 n - \mu_p^2 p}{\mu_n n + \mu_p p} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\varphi_{ab} = -\frac{1}{eT} \frac{\mu_n n (E_2 - \zeta) - \mu_p p (\zeta - E_1)}{\mu_n n + \mu_p p} \quad (8)$$

Rechnung verläuft genau wie bei FRÖHLICH [2].  
nähere Einzelheiten sei auf dieses Buch ver-  
sen.

$$n = n_0 e^{-\frac{E_2 - \zeta}{kT}} \quad \text{und} \quad p = p_0 e^{-\frac{\zeta - E_1}{kT}} \quad (9)$$

schließlich<sup>1</sup>

$$\varphi_{ab} = \frac{k}{e} \left( \frac{\mu_n n \ln \frac{n}{n_0} - \mu_p p \ln \frac{p}{p_0}}{\mu_n n + \mu_p p} \right) \quad (8a)$$

den Gl. (7) und (8) bzw. (8a) lassen sich sofort  
Beziehungen für die Grenzfälle  $n \gg p$ ,  $p \gg n$ ,  
 $n = n_i$  gewinnen:

Überschußleiter:

$$\left. \begin{aligned} R &= -\frac{3\pi}{8} \frac{1}{e n c} \\ \varphi_{ab} &= -\frac{k}{e} \ln \frac{n}{n_0} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Defektleiter:

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{3\pi}{8} \frac{1}{e p c} \\ \varphi_{ab} &= \frac{k}{e} \ln \frac{p_0}{p} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Eigenhalbleiter:

$$\left. \begin{aligned} R &= -\frac{3\pi}{8} \frac{1}{e c n_i} \frac{b-1}{b+1} \\ \varphi_{ab} &= -\frac{k}{e} \left( \frac{b \ln \frac{n_0}{n_i} - \ln \frac{p_0}{n_i}}{b+1} \right) \approx -\frac{\Delta E}{2eT} \frac{b-1}{b+1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$b = \mu_n/\mu_p$  bedeutet.

Die Abb. 1 und 2 zeigen  $\sigma_0$ ,  $\Delta\varrho/\varrho_H$ ,  $R$  und  $\varphi_{ab}$  in  
abhängigkeit von der Elektronendichte. Die Ab-  
sse ist  $n/n_i$ , der Wert 1 entspricht also der Eigen-  
tung. Die Ordinate ist in willkürlichen Einheiten  
getragen. Für  $b = \mu_n/\mu_p$  und  $n_i$  wurden die Werte  
n Germanium  $b \approx 2$ ,  $n_i = 3 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  bei  $300^\circ \text{ K}$   
wählt.

$\sigma_0$  zeigt in der Nähe der Eigenleitung ein aus-  
prägtes Minimum, während  $\Delta\varrho/\varrho_H$  ein Maximum  
weist.  $R$  und  $\varphi_{ab}$  wechseln dort ihr Vorzeichen.  
r  $p \gg n$  (Defektleitung) ist das Vorzeichen der  
ermokraft und des HALL-Koeffizienten positiv,  
r  $n \gg p$  (Überschußleitung) negativ. Beide durch-  
ufen ein Maximum und fallen zu großen Elek-  
onen- bzw. Löcherdichten hin wieder ab.

Die allgemeine Beziehung zwischen Stromdichte  
d äußeren elektrischen und magnetischen Feldern  
einem Halbleiter lautet:

$$\vec{i} = \sigma_0 \vec{E} + \alpha [\vec{E} \vec{H}] + \beta H^2 \vec{E} + \gamma \vec{H} (\vec{E} \vec{H}) \quad (13)$$

+ Glieder der Ordnung  $(H/c)^3$  und höher.

iese Gleichung läßt sich zusammen mit den durch  
) gegebenen Ausdrücken für  $\sigma_0$ ,  $R$  und  $\Delta\varrho/\varrho_H$  auch  
s der einfachen korpuskularen Halbleitertheorie

<sup>1</sup> K. LARK-HOROWITZ und V. A. JOHNSON [3] geben eine  
nliche Formel an, in welcher nur statt der Logarithmen  
wils  $(\ln(\cdot) - 2)$  steht.

gewinnen, wenn man für die Ströme die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \vec{i}_n &= \sigma_n \vec{E} - \frac{\mu_n}{c} [\vec{i}_n \vec{H}] \\ \vec{i}_p &= \sigma_p \vec{E} + \frac{\mu_p}{c} [\vec{i}_p \vec{H}] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ansetzt. Durch Einsetzen der rechten Seiten in das

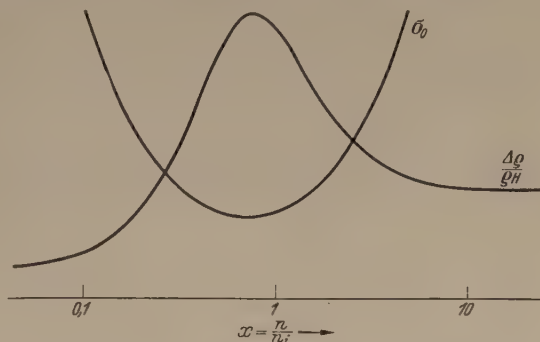


Abb. 1.  $\Delta\varrho/\varrho_H$  und  $\sigma_0$  in Abhängigkeit von der Elektronendichte.

Vektorprodukt folgt dann:

$$\left. \begin{aligned} \vec{i}_n &= \sigma_n \vec{E} - \frac{\sigma_n \mu_n}{c} [\vec{E} \vec{H}] \\ &\quad + \frac{\sigma_n \mu_n^2}{c^2} [[\vec{E} \vec{H}] \vec{H}] + \dots \\ \vec{i}_p &= \sigma_p \vec{E} + \frac{\sigma_p \mu_p}{c} [\vec{E} \vec{H}] \\ &\quad + \frac{\sigma_p \mu_p^2}{c^2} [[\vec{E} \vec{H}] \vec{H}] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Die bei dieser Behandlung nicht erfaßte Geschwin-  
digkeitsverteilung der Elektronen und Löcher, die  
sich bei der strengen Behandlung in der Verschieden-

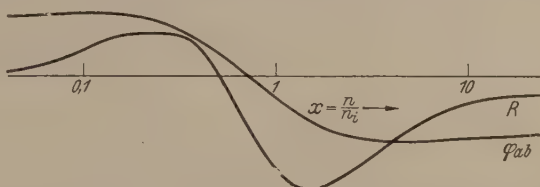


Abb. 2.  $\varphi_{ab}$  und  $R$  in Abhängigkeit von der Elektronendichte.

heit von  $\vec{\tau}^2$  und  $\vec{\tau}^2$  usw. geltend macht, kann man hier  
berücksichtigen, wenn man statt  $\mu^2$  jeweils  $\frac{3\pi}{8} \mu^2$   
und statt  $\mu^3$   $\frac{9\pi}{16} \mu^3$  einsetzt. Dann wird:

$$\left. \begin{aligned} \vec{i} &= (\sigma_n + \sigma_p) \vec{E} - \frac{3\pi}{8c} (\sigma_n \mu_n - \sigma_p \mu_p) [\vec{E} \vec{H}] \\ &\quad - \frac{9\pi}{16c^2} (\sigma_n \mu_n^2 + \sigma_p \mu_p^2) (H^2 \vec{E} - \vec{H} (\vec{E} \vec{H})) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Setzt man schließlich

$$\vec{i} = (i_x, 0, 0) \quad \text{und} \quad \vec{H} = (0, 0, H_z)$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} i_x &= e (\mu_n n + \mu_p p) E_x - \frac{3\pi e}{8c} (\mu_n^2 n - \mu_p^2 p) E_y H_z \\ &\quad - \frac{9\pi e}{16c^2} (\mu_n^3 n + \mu_p^3 p) H_z^2 E_x, \\ i_y &= 0 = e (\mu_n n + \mu_p p) E_y + \frac{3\pi e}{8c} (\mu_n^2 n - \mu_p^2 p) E_x H_z \\ &\quad - \frac{9\pi e}{16c^2} (\mu_n^3 n + \mu_p^3 p) H_z^2 E_y. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Aus der letzten Gleichung folgt sofort für  $R = \frac{E_y}{\sigma_0 E_x H}$

der in Gl. (7) gegebene Wert und durch Einsetzen von  $E_y$  in die erste Gleichung die entsprechenden Werte für  $\sigma_H$  und somit für  $\Delta\varrho/\varrho_H$ . Die Faktoren  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  in (13) bestimmen sich durch Vergleich mit (16) allgemein zu:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sigma_0^2 R \\ \beta &= -\frac{\sigma_0}{H_z^2} \left( \text{positiver Teil von } \frac{\Delta\varrho}{\varrho_H} \right) \\ &= -\frac{\sigma_0}{H_z^2} \left( \frac{\Delta\varrho}{\varrho_H} - (\sigma_0 R H_z)^2 \right) \\ \gamma &= -\beta. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Es sei hier noch erwähnt, daß diese Ableitung der Widerstandsänderung auch ohne Berücksichtigung

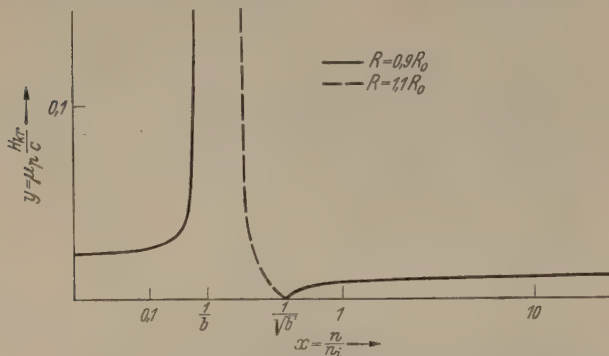


Abb. 3. Die Abhängigkeit der kritischen Feldstärke  $H_{kr}$  von der Elektronendichte.

der Statistik durch die beiden Faktoren  $\frac{3\pi}{8}$  und  $\frac{9\pi}{16}$  für gemischte Halbleiter eine von Null verschiedene Widerstandsänderung ergibt. Für reine Überschuß- oder Defektleiter heben sich dann jedoch die beiden Glieder in  $\Delta\varrho/\varrho_H$  gerade auf und die Widerstandsänderung wird mit der vereinfachten Theorie überhaupt nicht erfaßt.

In der durch Gl. (7) gegebenen HALL-Konstanten sind die Glieder der Ordnung  $(H/c)^2$  vernachlässigt worden. Zur Diskussion der HALL-Konstanten bei hohen Feldern muß also (7) noch durch entsprechende Glieder ergänzt werden. Dazu ist notwendig, in (16) noch das Glied der Ordnung  $(H/c)^3$  mitzuberechnen. Durch eine einfache Rechnung findet man hierfür wegen  $\bar{\tau}^4 = \frac{27\pi^2}{64} \bar{\tau}^4$

$$\bar{i} = \dots + \frac{27\pi^2 e}{64 c^3} (\mu_n^4 n - \mu_p^4 p) H^2 [\vec{E} \vec{H}]. \quad (19)$$

Berechnet man dann aus der um das neue Glied ergänzten Gleichung (17) die HALL-Konstante, so findet man:

$$R = -\frac{\frac{3\pi}{8c} (\mu_n^2 n - \mu_p^2 p) - \frac{27\pi^2}{64c} (\mu_n^4 n - \mu_p^4 p) \left(\frac{H}{c}\right)^2}{\sigma_0 \left( (\mu_n n + \mu_p p) - \frac{9\pi}{16} (\mu_n^3 n + \mu_p^3 p) \left(\frac{H}{c}\right)^2 \right)} \quad (20)$$

Unter Vernachlässigung der statistischen Faktoren verschwinden die Zusatzglieder wieder nur bei reiner Störstellenleitung.

Durch Umformung ergibt sich aus (20):

$$R = R_0 \left\{ \frac{1 - \frac{9\pi}{8} \left( \frac{b^4 x - 1/x}{b^2 x - 1/x} \right) y^2}{1 - \frac{9\pi}{16} \left( \frac{b^3 x + 1/x}{b x + 1/x} \right) y^2} \right\}, \quad (21)$$

wo  $b = \mu_n/\mu_p$ ,  $x = n/n_i$ ,  $y = \mu_p \frac{H}{c}$  und  $R_0$  der durch Gl. (7) gegebene Wert von  $R$  bei kleinen Feldern bedeutet.

Abb. 3 zeigt die kritische Feldstärke  $y_{kr}$  in Abhängigkeit von  $x$ , bei der die Abweichung des HALL-Koeffizienten von dem konstanten Wert  $R_0$  maßgebend wird. Als Definition für  $y_{kr}$  wurde der Wert

$$R(y_{kr}) = 0,9 R_0 \quad \text{bzw.} \quad = 1,1 R_0$$

gewählt, also mit  $y_{kr}$  diejenige Feldstärke bezeichnet, bei welcher die Abweichung von  $R$  vom konstanten Anfangswert 10% beträgt.

Außer im Bereich  $\frac{1}{\sqrt{b}} < x < \frac{1}{b}$  sinkt der HALL-

Koeffizient mit wachsender Feldstärke ab. Für hohe Felder kann er sogar Null werden und damit sein Vorzeichen ändern. Die kritische Feldstärke liegt allerdings fast überall so hoch, daß wesentliche Abweichungen des HALL-Koeffizienten von seinem Wert  $R_0$  kaum beobachtbar sind. Nur für sehr reine Präparate in der Nähe der Eigenleitung sinkt  $y_{kr}$  auf kleinere Werte. Im Übergangsbereich zwischen der

Eigenleitung und der Defektleitung  $\left( \frac{1}{\sqrt{b}} < x < \frac{1}{b} \right)$

steigt im Gegensatz dazu  $R$  über seinen Wert  $R_0$  an. Dieses Verhalten des HALL-Koeffizienten hängt mit der Tatsache zusammen, daß hier zwei Effekte gegeneinander wirken. Einerseits überwiegt die Löcherdichte bereits die Elektronendichte, andererseits aber der Einfluß der Elektronen infolge ihrer höheren Beweglichkeit stärker. Das hier geschilderte Verhalten des HALL-Koeffizienten scheint jedenfalls qualitativ experimentell bestätigt zu sein [4]. Zur qualitativen Deutung experimenteller Ergebnisse muß jedoch berücksichtigt werden, daß (21) nur eine Näherung ist und möglicherweise noch höhere Glieder in  $(H/c)$  hinzugezogen werden müssen. Ferner werden sich hier sicher Anisotropieeffekte stattdessen bemerkbar machen [5].

#### Zusammenfassung.

Es werden Formeln für die magnetische Widerstandsänderung und die Thermokraft in isotrop gemischten Halbleitern aufgestellt und zusammen mit den Ausdrücken für die spezifische Leitfähigkeit und den HALL-Koeffizienten diskutiert. Für den HALL-Koeffizienten ergibt sich in höherer Näherung eine Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke, die bei hohen Feldern eine Vorzeichenumkehr des HALL-Koeffizienten hervorrufen kann.

**Literatur.** [1] SHOCKLEY, W.: Holes and Electrons in Semiconductors, D. van Nostrand, New York, 1950, S. 216ff. — [2] FRÖHLICH, H.: Elektronentheorie der Metalle, Springer, Berlin (1936). — [3] LARK-HOROWITZ, V. A. JOHNSON: Semiconducting Materials, Butterworth Sci. Publ., London 1951, S. 70. — [4] DUNLAP, W. C.: Phys. Rev. **82**, 329, (1951). — [5] SEITZ, F.: Phys. Rev. **82**, 372, (1950).

Dr. OTFRIED MADELUNG  
und Dr. HEINRICH WELKER, Erlangen,  
Allgemeines Laboratorium der Siemens-  
Schuckertwerke.

## Ionosphären-Grenzfrequenz bei schiefem Einfall.

Von H. POEVERLEIN, München.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingegangen am 21. August 1952.)

### 1. Fragestellung.

Wenn ein Empfänger in einer gewissen Entfernung von einem Sender steht, ist von praktischem Interesse die höchste Frequenz, die unter gegebenen Voraussetzungen über die Ionosphäre noch übertragen werden kann. Diese Frequenz ist die (obere) Grenzfrequenz bei schiefem Einfall, auch MUF (maximum usable frequency) bezeichnet. Wiederum hat man sich mit ihrer Beobachtung befaßt, oft zusammen mit Echolotung bei schiefem Einfall [8]. Auf Grund der Theorie der Grenzfrequenzen zusammenfassende Darstellung [9] hat man auch möglichst einfache Methoden entwickelt, aus Ionosphärenregistrierungen Grenzfrequenzen für gegebene Bedingungen zu ermitteln<sup>1</sup>. Die APPLETON-VEE-Formel des Brechungsindex, die den Einfluß des Erdmagnetfelds berücksichtigt, ist zusammen mit den geometrisch-optischen Gesetzen in den neueren Arbeiten [14]—[16] der Berechnung der Grenzfrequenzen zugrundegelegt. Die Grenzfrequenz findet man so von der erdmagnetischen Induktion und der Ausbreitungsrichtung abhängig. Hier soll eine Übersicht über diese Abhängigkeit gegeben werden im Anschluß an Überlegungen und physikalische Konstruktionen, die zum Studium der Wellenausbreitung in der Ionosphäre durchgeführt wurden [17]—[22].

Die Grenzfrequenz für eine gegebene Entfernung ist eine Funktion der Elektronenkonzentration, bei der die Welle im Grenzfall reflektiert wird, und des Einfallswinkels, unter dem die Welle in die Ionosphäre eintritt. Der Einfallswinkel selbst hängt aber von der Entfernung Sender-Empfänger ab, auch von der Höhe der reflektierenden Ionosphärenschicht und vom Verlauf der Elektronenkonzentration als Funktion der Höhe. Die Grenzfrequenz in Abhängigkeit von der Entfernung Sender-Empfänger anzugeben, ist somit nicht ganz einfach. Man setzt die genaue Kenntnis der jeweiligen Bedingungen voraus.

Im folgenden ist daher (wie in einigen anderen Arbeiten) der Einfallswinkel als bekannt vorausgesetzt. Nach der Grenzfrequenz bei gegebenem Einfallswinkel gefragt. Das ist eine leichtere Aufgabe. Die Abhängigkeit der Elektronenkonzentration von der Höhe spielt dabei keine Rolle; es kommt nur auf die maximale Elektronenkonzentration in der Ionosphärenschicht an. Will man nachträglich noch die zurückgelegte Entfernung als Funktion des Einfallswinkels ermitteln, so kann man das in grober Näherung tun, indem man die Ionosphäre als dünne Schicht in einer gewissen Höhe ansieht, die wie ein Spiegel reflektiert. Wenn man in einer strengeren Betrachtung die Abhängigkeit der Elektronenkonzentration von der Höhe mit in Rechnung setzt,

darf man nicht vergessen, daß die kleinste Entfernung bei einer bestimmten Frequenz nicht vom steilsten Strahl, der noch reflektiert wird, zurückgelegt wird, sondern von einem etwas weniger steilen Strahl, nämlich von dem Grenzstrahl zwischen der „Fernstrahlung“ (PEDERSENray) und der „Nahstrahlung“ ([9], [23], siehe Echolotungen bei schiefem Einfall). Man muß also zu den im folgenden angegebenen Einfallswinkeln (Abb. 1 und 2) noch eine Korrektur hinzuzählen, wenn man zur Grenzfrequenz bei gegebener Entfernung übergehen will. Diese Korrektur verschwindet nur für sehr dünne Schicht und außerdem in dem Sonderfall, in dem die Reflexionshöhe unabhängig vom Einfallswinkel wird (horizontale Gerade in Abb. 1). Die Abbildungen sind aber nicht für eine derartige strenge Durchrechnung gedacht, sondern sollen nur ein ungefähres Bild davon geben, wie die Grenzfrequenz von den verschiedenen Daten abhängt.

Die Erdkrümmung ist vernachlässigt. Sie hat hauptsächlich zur Folge, daß Einfallswinkel nahe 90° in Wirklichkeit nicht auftreten können. Die Elektronenkonzentration ist als Funktion der Höhe allein angenommen. Horizontales Konzentrationsgefälle soll nicht vorhanden sein. Wenn die Strahl-optik, die hier vorausgesetzt ist, an der Reflexionsstelle versagt, ist partielle Reflexion und keine scharfe Grenzfrequenz mehr zu erwarten. Von Dämpfungseinflüssen auf die Reflexionsbedingung ist abgesehen.

### 2. Verhältnis der Grenzfrequenz bei senkrechtem Einfall zu der bei schiefem Einfall.

Die maximale Elektronenkonzentration der Ionosphärenschicht sei bekannt. Dann ist die Frage: Welches ist die höchste Frequenz, die bei einem bestimmten Einfallswinkel noch reflektiert wird? Hier ist die Frage umgedreht: Die höchste noch reflektierte Frequenz  $f$  wird als gegeben angesehen, und gefragt ist, wie hoch die maximale Elektronenkonzentration  $N$  in der Ionosphäre sein muß, damit bei einem bestimmten Einfallswinkel  $\varphi_0$  diese Frequenz gerade noch reflektiert wird.

Als Maß für die Elektronenkonzentration  $N$  (pro  $m^3$ ) nimmt man gerne die Frequenz  $f_0$ , entsprechend

$$f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0} \frac{e^2}{m} N \quad (1)$$

$$= 80,7 N,$$

oder das Verhältnis  $f_0/f$  bei gegebener Frequenz  $f$  ( $\epsilon_0$  Dielektrizitätskonstante des Vakuums,  $e$  und  $m$  Ladung und Masse des Elektrons; Einheiten  $V$ ,  $A$ ,  $m$ ,  $s$ ). Ein vertikal einfallender ordentlicher Strahl der Frequenz  $f_0$  wird bei der Elektronenkonzentration  $N$  reflektiert<sup>1</sup>. Wenn  $N$  die maximale Elektronen-

<sup>1</sup> Zusammenfassender Bericht [9], [10], praktische Anwendung GILLILAND und Mitarbeiter (z. B. [11]), neuere Methoden APPLETON und BEYNON [12], [13] sowie Fiat-bericht [6].

<sup>1</sup> Das gilt genau genommen nur für den „transversalen Typ“ der Wellenausbreitung. Der „longitudinale Typ“ der Wellenausbreitung (ord. Strahl wird z-Komponente) soll im

konzentration der Ionosphärenschicht ist, ist  $f_0$  die Grenzfrequenz des ordentlichen Strahls bei vertikalem Einfall.

Die Elektronenkonzentration  $N$ , bei der eine mit dem Einfallswinkel  $\varphi_0$  einfallende Welle reflektiert wird, entnimmt man auf einfache Weise graphischen Darstellungen des Brechungsindex in Abhängigkeit von der Wellennormalenrichtung, die dazu für viele Elektronenkonzentrationen  $N$  und für die vorausgesetzte Frequenz  $f$  gezeichnet sein müssen. Dies wurde früher [17], [18] gezeigt. Die erforderlichen graphischen Darstellungen sind auch schon angefertigt, und zwar sowohl für den ordentlichen als auch für den außerordentlichen Strahl (Abb. 5 und 6 in [18], auch [21]). Als Einfallsebene der Welle ist dabei die magnetische Meridianebene angenommen. An Stelle der Elektronenkonzentration  $N$  sind an den Kurven die Zahlenwerte  $(f_0/f)^2$ , dort mit  $(\omega_N/\omega)^2$  bezeichnet, angeschrieben.

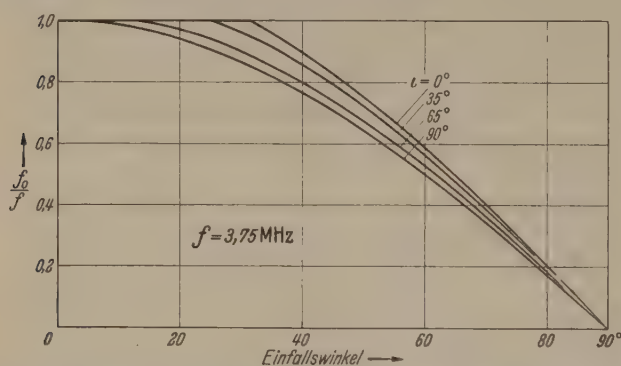


Abb. 1. Verhältnis der Grenzfrequenz bei vertikalem Einfall zur Grenzfrequenz bei schiefem Einfall. Ordentlicher Strahl, magnetische Meridiane, Inklination  $\iota$  verschieden. — Magnetische E-W-Ebene und magnetfeldfreier Fall wie  $\iota = 90^\circ$ .

Ist die vorausgesetzte Frequenz  $f$  die Grenzfrequenz des ordentlichen Strahls bei dem gegebenen Einfallswinkel, so sind die Elektronenkonzentration  $N$ , bei der die Welle reflektiert wird, und der Wert  $f_0/f$  als Maß für die Elektronenkonzentration die *Maximalwerte* in der Ionosphärenschicht.  $f_0/f$  ist dann das Verhältnis der Grenzfrequenz des ordentlichen Strahls bei senkrechtem Einfall zur Grenzfrequenz bei dem gegebenen Einfallswinkel.

Die Reflexion der Welle kann auf zweierlei Art erfolgen [17], [18], [19]: Entweder wird die Strahlrichtung (nicht die Wellennormalenrichtung) an der Reflexionsstelle horizontal — das ist der normale Fall — oder sie kehrt plötzlich in die entgegengesetzte Richtung um, so daß eine Spitze im Strahlweg entsteht. Diese Art der Reflexion zeigt der ordentliche Strahl, wenn er in der magnetischen Meridianebene steil in die Ionosphäre einfällt, mit einem Einfallswinkel  $\varphi_0$  (Winkel gegen die Vertikale) kleiner als  $\varphi_1$ , das zu errechnen ist aus (Gl. (2) in [19])

$$\sin \varphi_1 = \sqrt{\frac{f_H}{f_H + f}} \cos \iota. \quad (2)$$

$\iota$  ist die erdmagnetische Inklination,  $f_H$  die Gyrofrequenz

$$f_H = \frac{1}{2\pi} \frac{|e|}{m} B = 2,80 \cdot 10^6 B_{\text{Gauß}} \quad (3)$$

dämpfungsfreien Fall nur am Erdmagnetpol selbst eintreten (z. B. [18]), ist aber anscheinend auch in dessen Nähe nur selten und wird nicht für sich allein beobachtet [24].

( $B$  magnetische Induktion des Erdmagnetfelds). Die Reflexion in einer Spitze ( $\varphi_0 < \varphi_1$ ) tritt stets bei der gleichen Elektronenkonzentration ein wie die Reflexion des Vertikalstrahls [17], [18], [19]. In diesem Fall ist daher  $f_0/f = 1$  (konstant).

Die Werte  $f_0/f$ , die man für den ordentlichen Strahl in der magnetischen Meridianebene erhält, sind in Abb. 1 als Funktion des Einfallswinkels dargestellt. Als Frequenz<sup>1</sup> ist stets  $f = 3,75$  MHz (Wellenlänge 80 m), als erdmagnetische Induktion  $B = 0,5$  Gauß angenommen. Die verschiedenen Kurven beziehen sich auf verschiedene erdmagnetische Inklinationen. Man sieht, daß die Kurven als horizontale Gerade bei  $f_0/f = 1$  beginnen (außer für den Magnetpol), bei dem Einfallswinkel  $\varphi_1$  einen Knick haben und dann fallen.

Am Magnetpol ist die Strahlrichtung an der Reflexionsstelle, da sie dort horizontal ist, senkrecht zum Erdmagnetfeld. In diesem speziellen Fall stimmen Strahlrichtung und Wellennormalenrichtung überein. Folglich ist auch die Welle normal senkrecht zum Erdmagnetfeld. Das Erdmagnetfeld macht dann für den ordentlichen Strahl an der Reflexionsstelle überhaupt nichts aus. Eben ist es bei beliebigem Inklinationswinkel und Ausbreitung in der magnetischen E-W-Ebene. Die Kurve für den Erdmagnetpol ( $\iota = 90^\circ$ ) in Abb. 1 ist daher zugleich die Kurve für den magnetfeldfreien Fall und die Kurve für Ausbreitung in der E-W-Ebene bei beliebiger Inklination. Man erkennt daher in Abb. 1 den Unterschied zwischen Ausbreitung in der N-S-Ebene und Ausbreitung in der E-W-Ebene.  $f_0/f$  ohne Erdmagnetfeld errechnet man aus der Formel für den Brechungsindex und dem Brechungsgesetz für horizontale Wellennormalenrichtung ( $n = \sin \varphi_0$ ) bekanntlich zu

$$(f_0/f)_{o.M.} = \cos \varphi_0.$$

Die Kurve (Abb. 1) für den magnetfeldfreien Fall (bzw. für den Magnetpol oder die E-W-Ebene) ist demnach unabhängig von der Frequenz stets dieselbe cos-Kurve.

Am erdmagnetischen Äquator ( $\iota = 0^\circ$ ) in der magnetischen Meridianebene hat für  $\varphi_0 > \varphi_1$  die Strahlrichtung bei der Reflexion die Richtung des Erdmagnetfelds, die Wellennormale damit auch die Richtung. In diesem Fall ist der Brechungsindex des ordentlichen Strahls nach der APPLETON-HARTREE-Formel (z. B. [9], [17], [18])

$$n^2 = 1 - \frac{f_0^2/f^2}{1 + f_H/f}.$$

Mit  $n = \sin \varphi_0$  folgt daraus für  $\varphi_0 > \varphi_1$

$$(f_0/f)_{\text{Aqu.}} = \sqrt{1 + f_H/f \cos \varphi_0}.$$

Diese analytisch einfachen Ausdrücke für gewisse spezielle Fälle ( $f_0/f = 1$ , Gl. (4) und (5)) finden sich bei BOOKER ([14], Zusammenstellung von SHINN und WHALE [16]) mit der Feststellung, daß bei beliebiger Inklination und Ausbreitungsrichtung stets zwischen den durch diese Ausdrücke gegebenen Grenzen liegt.

<sup>1</sup> Die gegebene Frequenz ist (auch in den folgenden Abb.) die Grenzfrequenz beim jeweiligen Einfallswinkel, nicht die bei vertikalem Einfall.

Abb. 2 stellt das Verhältnis der Grenzfrequenz senkrechtem Einfall zu der bei schiefem Einfall den *außerordentlichen Strahl* dar. Die Voraussetzungen sind wieder:  $f = 3,75$  MHz (größer als  $f_H$ )

$B = 0,5$  Gauß, magnetische Meridianebene als Fallsebene.  $f_0$  ist genau so ermittelt wie beim ordentlichen Strahl. Die Grenzfrequenz des vertikal einfallenden außerordentlichen Strahls ist aber nicht  $f_0$ , sondern errechnet sich aus der Reflexionsbedingung des außerordentlichen Vertikalstrahls  $f_{vert} > f_H$

$$f_0^2 = f_{vert}^2 - f_{vert} f_H$$

$$f_{vert} = \frac{1}{2} f_H + \sqrt{f_0^2 + \frac{1}{4} f_H^2} \quad (6)$$

Abb. 2 ist  $f_{vert}/f$  aufgetragen. Da nach Gl. (6) die Grenzfrequenz  $f_{vert}$  für  $f_0 \rightarrow 0$  gegen  $f_H$  geht, sinken die Kurven nicht auf null ab.

Auch beim außerordentlichen Strahl ist die Ausbreitungsrichtung an der Reflexionsstelle sowohl im Verhältnis zum Erdmagnetfeld als auch bei E-W-Ausbreitung in irgendeiner geometrischen Breite senkrecht zum Erdmagnetfeld und mit der Wellenlänge zusammenfallend. Die Kurven für den ordentlichen Strahl gelten demnach auch wieder für E-W-Ausbreitung bei beliebiger Inklination. Formeln für spezielle Fälle (Pol und Äquator) gibt BOOKER ([14], S. 16) an.

### 3. Verhältnis der E-W-Grenzfrequenz zur N-S-Grenzfrequenz.

Dividiert man  $f_0/f$  nach Abb. 1 durch  $(f_0/f)_{o.M.}$  nach Gl. (4) oder ebenfalls nach Abb. 1), so erhält man, wenn man  $f_0$  für beide Fälle als gleich ansieht,  $f_{o.M.}/f$ , das ist das Verhältnis der Grenzfrequenz ohne Magnetfeld zur Grenzfrequenz des ordentlichen Strahls in der magnetischen Meridianebene oder, was dasselbe ist, das Verhältnis der Grenzfrequenz für die magnetische E-W-Ebene zur Grenzfrequenz für die magnetische Meridianebene. Die erhaltenen Werte zeigt Abb. 3. Vorausgesetzt ist wie in Abb. 1: ordentlicher Strahl,  $f = 3,75$  MHz,  $B = 0,5$  Gauß. Aus Gl. (4) folgt für  $\varphi_0 < \varphi_1$ , wo ja  $f_0/f = 1$  ist,

$$f_{o.M.}/f = 1/\cos \varphi_0 \quad (7)$$

Am erdmagnetischen Äquator und für  $\varphi_1 > \varphi_0$  ergeben Gl. (4) und (5)

$$f_{o.M.}/f = \sqrt{1 + f_H^2/f^2} \quad (8)$$

Am Erdmagnetpol ist nach dem vorangesagten

$$f_{o.M.}/f = 1 \quad (9)$$

In Abb. 4 sind  $f_{o.M.}/f$ -Kurven für verschiedene Frequenzen  $f$  dargestellt<sup>1</sup>.  $f$  bedeutet wieder die Grenzfrequenz des ordentlichen Strahls in der magnetischen Meridianebene,  $f_{o.M.}$  die Grenzfrequenz ohne Erdmagnetfeld und zugleich die Grenzfrequenz des ordentlichen Strahls in der magnetischen E-W-Ebene. Dieser Abbildung sind im Gegen-

satz zu den vorhergehenden verschiedene Werte der erdmagnetischen Induktion  $B$  je nach der Inklination zugrundegelegt, eben ungefähr die Werte, die man auf der Erde wirklich hat:

|                                     |                 |
|-------------------------------------|-----------------|
| $\iota = 0^\circ$ (erd magn. Äqu.): | $B = 0,35$ Gauß |
| $\iota = 35^\circ$ :                | $B = 0,39$ Gauß |
| $\iota = 65^\circ$ :                | $B = 0,50$ Gauß |

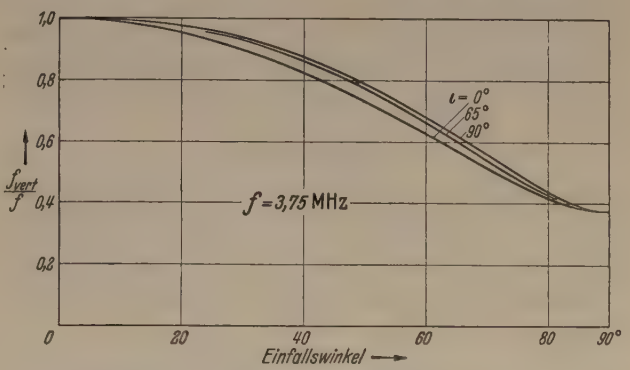


Abb. 2. Verhältnis der Grenzfrequenz bei vertikalem Einfall zur Grenzfrequenz bei schiefem Einfall. Außerordentlicher Strahl, magnetische Meridianebene, Inklination  $\iota$  verschieden. — Magnetische E-W-Ebene wie  $\iota = 90^\circ$ .

Abb. 4 wurde folgendermaßen erhalten: Gl. (7), (8) und (9) geben die Werte  $f_{o.M.}/f$  am erdmagnetischen Äquator und am Erdmagnetpol für beliebige Frequenz  $f$ . Spezielle Werte für beliebige Inklination

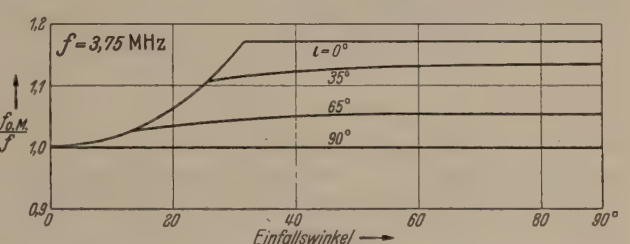


Abb. 3. Verhältnis der Grenzfrequenz ohne Magnetfeld zur Grenzfrequenz des ordentlichen Strahls in der magnetischen Meridianebene.

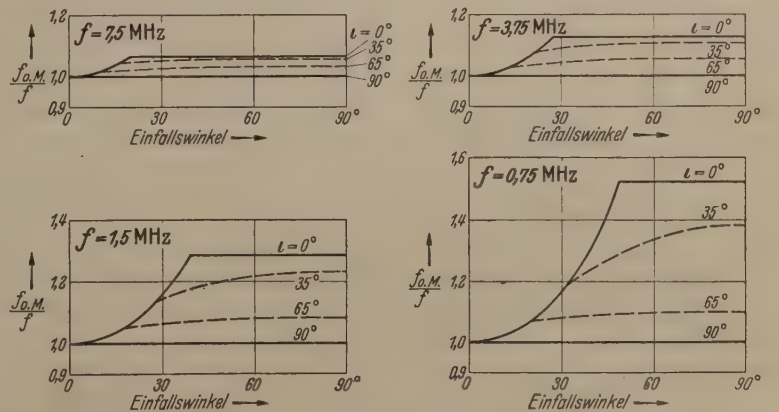


Abb. 4. Verhältnis der Grenzfrequenz ohne Magnetfeld zur Grenzfrequenz des ordentlichen Strahls in der magnetischen Meridianebene.

waren auch noch leicht zu berechnen. So erhält man aus Gl. (2) den Einfallswinkel  $\varphi_1$ , bei dem die Kurve von der  $1/\cos \varphi_0$ -Kurve (Gl. (7)) abzweigt. Als weiterer spezieller Wert ist der Grenzwert für  $\varphi_0 \rightarrow 90^\circ$  (rechter Kurvenendpunkt) berechnet (nächster Absatz). Die Kurven zwischen diesen beiden Endpunkten lassen sich nun ganz ungefähr nach dem Vorbild der genau konstruierten Kurven von Abb. 3 einzeichnen. Wollte man weitere Kurvenpunkte für beliebige Inklination ermitteln, so würde

<sup>1</sup> Zur Ergänzung von Abb. 4 nach höheren Frequenzen sei angegeben: Am erdmagnetischen Äquator (horizontaler Gerade  $\iota = 0^\circ$  in Abb. 4) ist nach Gl. (8) bei  $f = 15$  MHz  $f_{o.M.}/f = 1,032$ , bei  $f = 30$  MHz  $f_{o.M.}/f = 1,016$ .

man zweckmäßigerweise graphisch vorgehen und müßte dazu die Konstruktionen für mehrere Frequenzen durchführen. Das wäre sehr mühselig und ist daher unterlassen worden. Genau berechnet oder konstruiert sind demnach nur die Kurven für den erdmagnetischen Äquator, für den Pol (trivial) und die spezielle Kurve  $f = 3,75$  MHz,  $\iota = 65^\circ$ , die aus Abb. 3 übernommen ist.

Die Berechnung der Grenzwerte für das rechte Kurvenende (bei beliebiger Inklination) geschah so: Für die Reflexionsstelle gilt das Brechungsgesetz

$$\sin \varphi_0 = n \sin \varphi.$$

$\varphi_0$  ist dabei der Einfallswinkel und  $\varphi$  der Winkel der Wellennormale gegen die Vertikale an der Reflexionsstelle. Beide sollen nur wenig von  $90^\circ$  verschieden sein. Auch  $\varphi$  ist nicht genau  $90^\circ$  wegen der Abweichung der Strahlrichtung von der Wellennormalenrichtung. Setzt man

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

und

$$\chi_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi_0,$$

so wird das Brechungsgesetz

$$\cos \chi_0 = n \cos \chi$$

oder näherungsweise

$$1 - \frac{1}{2} \chi_0^2 \approx n \left( 1 - \frac{1}{2} \chi^2 \right). \quad (10)$$

Die Reflexion streifend einfallender Wellen erfolgt bei kleiner Elektronenkonzentration  $N$  bzw. bei kleinem Wert von  $f_0$ . Aus der APPLETON-HARTREE-Formel für den Brechungsindex (z. B. [9], [17], [18]) folgt unter dieser Bedingung

$$n \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{f_0^2}{A}$$

mit

$$A = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{f_H}{f} \right)^2 \sin^2 \alpha + \sqrt{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{f_H}{f} \right)^2 \sin^2 \alpha \right]^2 + \left( \frac{f_H}{f} \right)^2 \cos^2 \alpha}. \quad (11)$$

$\alpha$  ist dabei der Winkel der Wellennormale gegen die Erdmagnetfeldrichtung.

Eine Abschätzung des Winkels  $\chi$  an der Reflexionsstelle ergibt sich aus der Bedingung, daß an der Reflexionsstelle zwei Lösungen des Brechungsgesetzes zusammenfallen. Diese Bedingung läßt sich so formulieren:

$$\frac{\partial}{\partial \chi} (n \cos \chi) = 0.$$

Hieraus folgt, was hier nicht ausgeführt werden soll, daß  $\chi$  in erster Näherung proportional  $(f_0/f)^2$  ist. In Gl. (10) ist daher  $\chi^2$  zu vernachlässigen. Man erhält so

$$\chi_0^2 \approx \frac{f_0^2/f^2}{A}$$

oder

$$f_0/f \approx \chi_0 \sqrt{A}.$$

Ohne Erdmagnetfeld ist nach Gl. (4)

$$f_0/f_{o.M.} \approx \chi_0.$$

Durch Division beider Ausdrücke folgt für  $\chi_0 \rightarrow 0$

$$f_{o.M.}/f = \sqrt{A}. \quad (12)$$

$A$  ist aus Gl. (11) zu berechnen, wobei für  $\alpha$  die erdmagnetische Inklination  $\iota$  einzusetzen ist.

#### 4. Ergebnisse.

Den Abbildungen entnimmt man: Die Grenzfrequenz des ordentlichen Strahls bei schiefem Einfall (Abb. 1 u. 3) hängt so von der erdmagnetischen Inklination ab, daß sie unter sonst gleichen Bedingungen vom Äquator zum Erdmagnetpol hin zunimmt<sup>1</sup>. Sie ist in der magnetischen N-S-Richtung kleiner als in der magnetischen E-W-Richtung. In der magnetischen E-W-Richtung ist sie ja dieselbe wie am Magnetpol (unter gleichen Bedingungen). Die Unterschiede sind um so größer, je niedriger die Frequenz ist (Abb. 4).

Der außerordentliche Strahl bei Frequenzen oberhalb der Gyrofrequenz hat bekanntlich höhere Grenzfrequenzen als der ordentliche, da für ihn der Brechungsindex stets kleiner ist. Die Abhängigkeit der Grenzfrequenz von der Inklination und von der Ausbreitungsrichtung ist bei ihm nach Abb. 2 gerade umgekehrt wie beim ordentlichen Strahl: Abnahme vom Äquator zum Pol, in der N-S-Richtung höhere Werte als in der E-W-Richtung.

Der Unterschied zwischen N-S- und E-W-Ausbreitung ist am größten für den ordentlichen Strahl am erdmagnetischen Äquator. Beträgt hier beispielsweise bei nicht zu steiler Einfallsrichtung die N-S-Grenzfrequenz 1,5 MHz, so ist nach Abb. 4 die E-W-Grenzfrequenz 30% größer, also 1,95 MHz. So niedrige Frequenzen kommen aber nur als Grenzfrequenz der E-Schicht manchmal vor. Bei hohen Grenzfrequenzen, wie sie in der F-Schicht üblich sind, ist der Unterschied zwischen verschiedenen Richtungen bedeutend kleiner.

Für irgendeine erdmagnetische Inklination entfernen sich die Kurven in Abb. 4 mit abnehmender Frequenz sehr stark von der Äquatorkurve. (Der Ausdruck  $A$ , Gl. (11) und (12), strebt für  $f \rightarrow 0$  einem endlichen Grenzwert zu, wenn der einzusetzende Inklinationswinkel nicht null ist.) Bei einer Inklination von  $65^\circ$  bleibt dadurch der Unterschied zwischen N-S und E-W klein. Bei  $35^\circ$  Inklination wird er wesentlich größer.

Die Grenzfrequenz des ordentlichen Strahls ist bei steilem Einfall in der magnetischen Meridianebene dieselbe wie bei vertikalem Einfall (siehe z. B. [19]). Am erdmagnetischen Äquator ist das, was schon früher bemerkt wurde, bis zu ziemlich großen Einfallswinkeln der Fall, z. B. bei 1,5 MHz bis etwa  $40^\circ$  (hierzu Tabelle 2 in [19]). Das gäbe vielleicht eine gute Möglichkeit, die Theorie durch Messungen zu prüfen.

Man kann nun fragen, ob bei Beobachtung einer Grenzfrequenz schlechthin wohl die Grenzfrequenz des ordentlichen Strahls oder die des außerordentlichen Strahls beobachtet wird. Oberhalb der Gyrofrequenz, wo die Grenzfrequenz des außerordentlichen Strahls größer ist, wird diese die Grenzfrequenz schlechthin sein, falls die Dämpfung d

<sup>1</sup> Man beachte, daß die Ordinate in den Abb. umgekehrt proportional der Frequenz  $f$  ist.

elle nur schwach ist. Bei starker Dämpfung dagegen empfängt man nur den ordentlichen Strahl, dann der außerordentliche stärker absorbiert oder reflektiert wird [25]. Der außerordentliche Strahl unterhalb der Gyrofrequenz hat stets kleinere Grenzfrequenz als der ordentliche Strahl und bestimmt daher in keinem Fall die zu beobachtende Grenzfrequenz.

*Zusammenfassung.*

Die früher entwickelte Methode zur Konstruktion von Strahlwegen in der Ionosphäre, bei der der Einfluß des Erdmagnetfelds berücksichtigt ist, wurde nun zu angewandt, die Grenzfrequenz bei schiefem Einfall zu untersuchen. Unter Grenzfrequenz ist hier die höchste übertragene Frequenz bei gegebenem Einfallswinkel verstanden. Die Abbildungen zeigen die ermittelten Größen: das Verhältnis der Grenzfrequenz bei senkrechtem Einfall zu der bei schiefem Einfall und das Verhältnis der Grenzfrequenz ohne Erdmagnetfeld (die identisch ist mit der des ordentlichen Strahls in der E-W-Ebene) zur Grenzfrequenz des ordentlichen Strahls in der magnetischen Meridianebene bei gleichem Einfallswinkel. Dieses zuletzt genannte Verhältnis nimmt für niedrige Frequenzen am erdmagnetischen Äquator einen ziemlich großen Wert an.

Eine gelegentliche Diskussion mit Herrn Dr. L. RAWER war für die Inangriffnahme der Arbeit mitbestimmend. Herrn cand. ing. L. FREYBERGER danke ich für Zeichenarbeit.

**Literatur.** [1] TAYLOR, A. H., and E. O. HULBURT, Phys. Rev. **27**, 189 (1926). — [2] CRONE, W., K. KRÜGER, G. GOU-BAU u. J. ZENNECK: Hochfrequenztechn. **48**, 1 (1936). — [3] FARMER, F. T., C. B. CHILDS and A. COWIE: Proc. phys. Soc. **50**, 767 (1938). — [4] EYFRIG, R.: Hochfrequenztechn. **56**, 161 (1940). — [5] GROSSKOPF, J.: Telegr.-Fernspr.-Techn., Berlin **29**, 127 (1940). — [6] DIEMINGER, W. in Naturforschung u. Medizin in Deutschland (Fiat-Review) Bd. 17, Wiesbaden 1948, S. 132. — [7] HARNISCHMACHER, E.: Comptes Rendus **228**, 1936 (1949). — [8] DIEMINGER, W.: Z. angew. Phys. **3**, 90 (1951). — [9] LASSEN, H. in F. VILBIG u. J. ZENNECK: Fortschr. Hochfrequenztechnik, Bd. 1, Leipzig 1941, S. 1. — [10] GROSSKOPF, J. in F. VILBIG u. J. ZENNECK: Fortschr. Hochfrequenztechnik, Bd. 2, Leipzig 1943, S. 45. — [11] GILLILAND, T. R., S. S. KIRBY, N. SMITH and S. E. REYMER: Proc. I. R. E. **26**, 1347 (1938). — [12] APPLETON, E. V., and W. J. G. BEYNON: Proc. phys. Soc. **52**, 518 (1940). — [13] APPLETON, E. V., and W. J. G. BEYNON: Proc. phys. Soc. **59**, 58 (1947). — [14] BOOKER, H. G.: J. Geophysic. Res. **54**, 243 (1949). — [15] MILLINGTON, G.: Proc. Inst. electr. Engr. **98**, Part III, 314 (1951). — [16] SHINN, D. H., and H. A. WHALE: J. Atmosph. and Terr. Phys. **2**, 85 (1952). — [17] POEVERLEIN, H.: S.-B. Bayer. Akad. **1948**, 175. — [18] POEVERLEIN, H.: Z. angew. Phys. **1**, 517 (1949). — [19] POEVERLEIN, H.: Z. angew. Phys. **2**, 152 (1950). — [20] POEVERLEIN, H.: Z. angew. Phys. **3**, 135 (1951). — [21] FORSGREN, S. K. H.: Chalmers Tekn. Högsk. Handlingar, Göteborg **104** (1951). — [22] ARGENCE, É.: Comptes Rendus **232**, 2080 (1951) und **233**, 607 (1951). — [23] FÖRSTERLING, K., u. H. LASSEN: Hochfrequenztechn. **42**, 158 (1933). — [24] BARRÉ, M., et K. RAWER: Rev. scient. Paris **88**, 147 (1950). — [25] BECKER, W.: J. Atmosph. and Terr. Phys. **1**, 73 (1950).

Dozent Dr. HERMANN POEVERLEIN,  
Elektrophysikalisches Institut  
der Technischen Hochschule,  
München 2.

Die Mehrfach-Funken-Kamera und ihre Anwendung in der technischen Physik.

Von HUBERT SCHARDIN, Weil am Rhein.

Mit 7 Textabbildungen.

(Eingegangen am 28. August 1952.)

1. Einleitung.

Unter „Angewandter Physik“ versteht man die Anwendung physikalischer Methoden — theoretischer und experimenteller Art — zur Lösung von Problemen auf Nachbargebieten wie z. B. der Geologie, der Biologie, der Astronomie u. dgl.; dementsprechend gibt es eine Geophysik, eine Biophysik, eine Astrophysik, als Teilgebiete der „Angewandten Physik“. In ebensolches Teilgebiet ist auch die „Technische Physik“, die Anwendung physikalischer Methoden auf technische Probleme umfassend.

In diesem Sinne hat W. MEISSNER das Arbeitsgebiet seines Lehrstuhls für „Technische Physik“ stets aufgefaßt. Er hat sich in der Vorlesung und in den Übungen mit großem Erfolg bemüht, dem Gesamtgebiet der technischen Physik gerecht zu werden. Wegen der Vielseitigkeit des Stoffes der technischen Physik ist jedoch in bezug auf die Forschungstätigkeit in einem „Institut für technische Physik“ eine Spezialisierung notwendig. Diese Spezialgebiete und bei den verhältnismäßig wenigen bestehenden Instituten für technische Physik ganz verschiedenartig: Meßtechnik, Aerodynamik, Hochfrequenztechnik, Kunststofftechnik, Kältetechnik im Meißnerischen Institut u. a. Im folgenden soll nun einiges berichtet werden über eine spezielle Apparatur und

ihre Anwendungen, die ihren Ausgangspunkt in dem „Institut für technische Physik an der Technischen Hochschule Berlin“ genommen hat, dessen Leiter von der Gründung (nach dem ersten Weltkrieg) bis zum Jahre 1936 Geheimrat C. CRANZ gewesen ist.

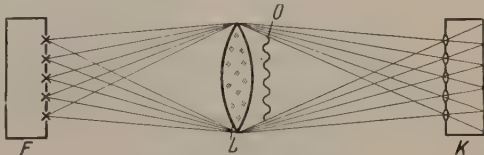


Abb. 1. Aufbau der Mehrfach-Funken-Anordnung. F Funkenaggregat, L Linse oder Hohlspiegel, O Objekt, K Kamera.

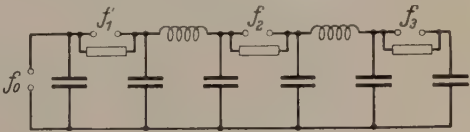


Abb. 2. Schaltung der Funkenstrecken. f<sub>0</sub> = Auslösefunkenstrecke; f<sub>1</sub> ... f<sub>n</sub> = Beleuchtungsfunkenstrecke.

2. Die Mehrfach-Funken-Anordnung in der ursprünglichen Form.

Zum Zweck der Untersuchung schnellverlaufender technisch-physikalischer Vorgänge war es notwendig, eine Anordnung zu schaffen, die bei der Größe etwa

eines normalen Kinobil-  
des 20–30 Einzelbilder  
bei einer Bildfrequenz in  
der Größenordnung von  
100 000/sec lieferte. Ferner  
sollte der Aufbau mit La-  
boratoriumsmitteln mög-  
lich sein. Die Lösung die-  
ser Aufgabe bestand einer-  
seits in einer Anordnung  
mit getrennten optischen  
Strahlengängen, aber ge-  
meinsamem Objektfeld  
(Abb. 1), und andererseits

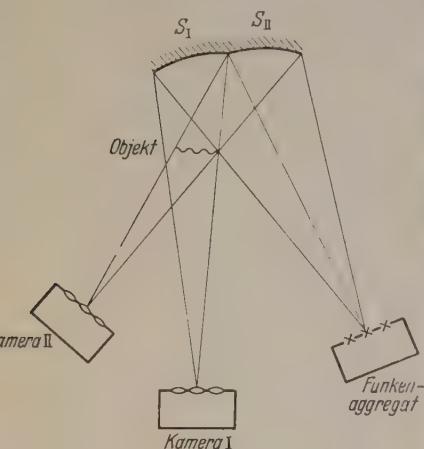


Abb. 3. Schematische Anordnung für die gleichzeitige Aufnahme verschiedener Bildserien.  $S_I$ ,  $S_{II}$  Hohlspiegel. Beim praktischen Aufbau sind die Strahlengänge länger gestreckt und nicht so stark gegeneinander geneigt.

zur Beleuchtung des Vor-  
ganges aus einer entspre-  
chenden Anzahl getrennter  
Funkenstrecken, die auf  
rein elektrischem Wege  
mit der erforderlichen Fre-  
quenz nacheinander ge-  
zündet wurden (Abb. 2).  
[1] Der besondere Vorteil  
dieser Anordnung ist, daß  
jegliche mechanische Be-  
wegung vermieden wird.  
Auch heute noch ist es  
sehr schwierig, die gleiche Bildfrequenz bei gleicher  
Bildgröße und Bildgüte zu erzielen.

Die Bildtrennung nach diesem Prinzip ist nur bei  
durchfallendem Licht möglich. Das ist ein Nachteil,  
der bei selbstleuchtenden Vorgängen ins Gewicht  
fällt; dafür lassen sich aber in einfacher Weise außer  
reinen Schattenaufnahmen durch Einfügen von  
Blenden vor den abbildenden Objektiven Schlieren-  
aufnahmen und mit Hilfe von Polarisationsfolien  
spannungsoptische Aufnahmen machen.

Diese Anordnung hat sich in den 25 Jahren  
ihrer Anwendung für viele Zwecke außerordentlich  
bewährt. Sie wurde vervollkommen und die  
Grenzen ihrer Anwendungsmöglichkeit erweitert.  
Die folgenden Abschnitte sollen einiges hierüber  
berichten.

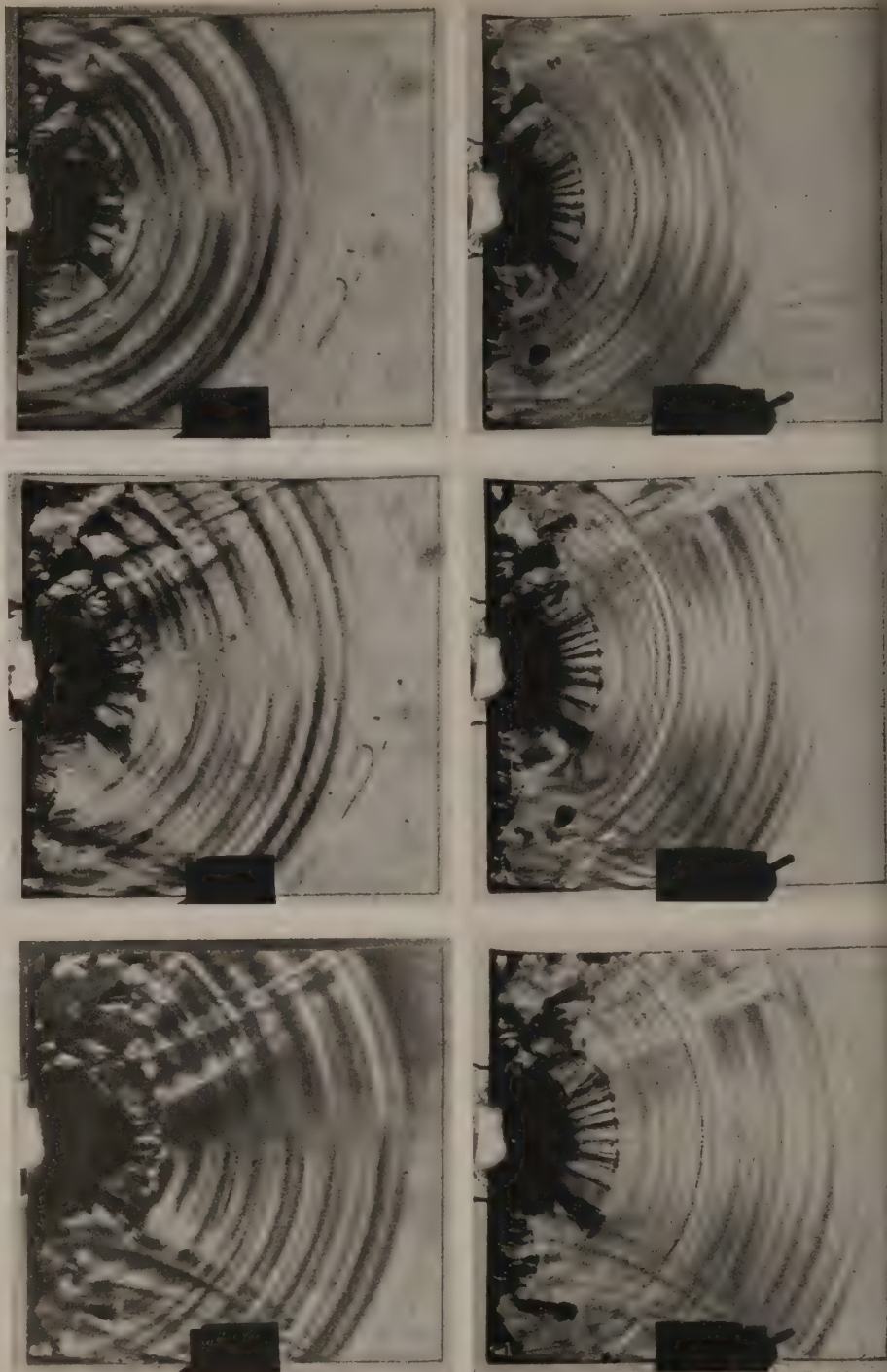


Abb. 4. 6 schlierenoptische (links) und 6 spannungsoptische (rechts) Te-  
bilder aus einer kinematographischen Serie von der Ausbreitung elastischer  
Wellen in einer Glasplatte. Die einander entsprechenden Bilder gehören  
zum identischen Zeitpunkt desselben Vorganges. Die Anregung erfolgte

### 3. Gleichzeitige Aufnahmen von Schatten-, Schlieren- und spannungsoptischen Bildern.

Zur eindeutigen Identifizierung des Zustandes i-  
einem Objekt ist es oft notwendig, gleichzeitig Auf-  
nahmen nach verschiedenen Verfahren zu machen  
so sind z. B. bei der Bewegung von Objekten mit  
Überschall einfache Schattenaufnahmen als auch  
Schlierenbilder wünschenswert. Bei dynamischen  
Vorgängen in transparenten Körpern (z. B. Plexiglas)  
ist das Vorliegen folgender Aufnahmen wertvoll:

1. Schlierenbilder in durchfallendem Licht, ge-  
gebenenfalls mit senkrecht zueinander orientierte  
Schlierenblenden;



rch einen Stoß gegen die Mitte des linken Randes. Man erkennt die ont der Longitudinal- und Transversalwellen, die Bildung von Longi- dinal- und Transversalwelle bei der Reflexion der Longitudinalwelle an den Rande sowie Einzelheiten über die Entstehung der Brüche.

2. Schlierenbilder der Oberflächen, die über deren eformation Aussagen erlauben;

3. spannungsoptische Aufnahmen.

Abb. 3 zeigt nun eine prinzipielle Möglichkeit, mit n und demselben Funkenaggregat unter Verwendung erschiedener Hohlspiegel das Objekt mehrfach zu urchstrahlen und entsprechend mehrere getrennte ameras auszuleuchten, wobei für jeden Strahlen- ung ein anderes optisches Verfahren zur Anwendung elangen kann. Die Spiegel können sowohl neben- s auch übereinander angeordnet sein. Ein An- endungsbeispiel für die gleichzeitige Aufnahme von

schlieren- und spannungs- optischen Bildern zeigt Abb. 4 [2]. Der besondere Vorteil dieses Verfahrens ist die absolute Gleich- zeitigkeit der einzelnen einander entsprechenden Bilder.

Grundsätzlich läßt sich auch das Interferenzver- fahren in diese Kombi- nation mit einbeziehen, doch wird man wegen dessen weniger einfachen Justierung dieses — wenn überhaupt — lieber für sich allein anwenden.

#### 4. Schaltmöglichkeiten für die Funkenerzeugung.

Die 1929 angegebene Schaltung nach Abb. 2 be- steht aus Verzögerungs- und Funkenkreisen. Sämt- liche Kondensatoren sind zunächst auf die gleiche Spannung  $E_0$  aufgeladen, so daß an den Funken- strecken mit Ausnahme von  $f_0$  keine Spannung liegt. Das hat den großen Vorteil, daß die richtige zeitliche Aufeinanderfolge der Funken garantiert ist. Die Schaltung hat jedoch folgende Eigenschaft, die aber nicht immer nur als Nachteil anzusehen ist: Die Ladung der Konden- satoren fließt z. T. über die vorhergehenden Fun- kenstrecken ab, so daß diese dadurch ein Nach- leuchten aufweisen. Die ersten Bilder einer mehr- gliedrigen Anordnung weisen daher neben dem scharfen Momentbild ein schwaches Bild des spä- teren Verlaufs auf. Um

letzteres nicht zu stark werden zu lassen, ist es daher zweckmäßig, die Kette nach einer gewissen Anzahl von Gliedern (z. B. 12 oder 6) abzubrechen und neu zu zünden. In dieser Richtung kann man natürlich bis zur Grenze gehen, d. h. jeden Beleuchtungsfunken neu zünden. Möglichkeiten hierfür ohne die Zuhilfe- nahme von Röhren zeigt Abb. 5. Mit Röhren lassen sich eine große Anzahl weiterer Schaltungen an- geben [3].

#### 5. Die Zeitmessung.

In allen Fällen — auch wenn man die Zündung der Funken durch einen Quarzsender steuert — muß man eine gesonderte Messung der Funken-Zeitpunkte durchführen, wenn man äußerste Genauigkeit er- zielen will. Diese Zeitmessung kann optisch-me-

chanisch auf rotierendem Film oder oszillographisch erfolgen.

Die Ausmessung der Lage des Bildpunktes eines Funkens auf einem feinkörnigen Film kann mit einer Genauigkeit von  $3\mu$  erfolgen. Bei 100 m/sec Umlaufgeschwindigkeit des Registrierfilms ergibt sich damit eine Zeitmeßgenauigkeit von  $3 \cdot 10^{-8}$  sec. Es ist schwie-

ein GAUTIER-Gitter an die Stelle des Objektes zu setzen und die Platte mit diesem vorzubelichten. Die Ausmessung hat dann gegen die Netzlinien des GAUTIER-Gitters zu erfolgen, wodurch die Fehler weitgehend kompensiert werden.

Hat das Objekt eine wesentliche Ausdehnung in der Lichtrichtung, so tritt infolge der räumlichen Entfernung der abbildenden Objektive voneinander eine perspektivische Verzerrung auf. Diese läßt sich i. a. bei der Ausmessung mit Hilfe der Netzlinien des GAUTIER-Gitters korrigieren, in schwierigeren Fällen ist immer eine stereoskopische Auswertung unter Verwendung der Anordnung nach Abschnitt 3 möglich.

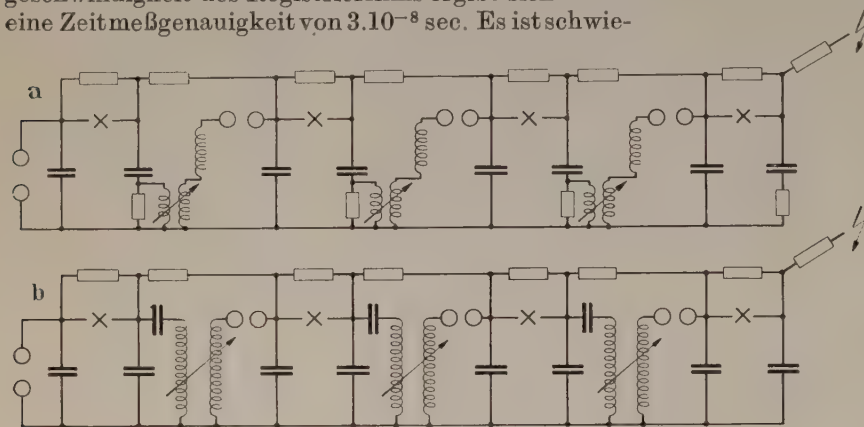


Abb. 5. Getrennte Zündung von Beleuchtungsfunken.

a) in einer Kette mit induktiver Kopplung; b) mit kapazitiver Kopplung (nach K. VOLLRATH).

rig, die gleiche Genauigkeit mit einem Oszillographen zu erzielen, da es ja notwendig ist, sämtliche Funken einer Aufnahmeserie einzuordnen, d. h. also, eine Zeitmessung dieser Genauigkeit für den einzelnen Funken durchzuführen und dabei den Gesamtzeitraum von  $n \times \frac{1}{f_w}$  ( $n$  = Bildzahl,  $f_w$  = Bildfrequenz) zu erfassen.

Will man doch mit einem Oszillographen arbeiten, so verwendet man zweckmäßigerweise einen quarzgesteuerten Rasteroszillographen, wobei die Funkenmarken über eine Photozelle hineingegeben werden.

Beleuchtung des Vorganges durch Funken hat insbesondere für hohe Bildfrequenzen ( $10\,000$ — $10^7$ /sec) ihre großen Vorteile. Das Prinzip der ruhenden getrennten Strahlengänge im durchfallenden Licht ist für viele Untersuchungen bewegter Vorgänge aber so bequem, daß es auch bei kleinen Bildfrequenzen vorteilhaft sein kann. In diesem Falle läßt sich die Zuführung des Lichtes mit Hilfe eines rotierenden Vielflächenspiegels nach Abb. 6 realisieren. Jeder einzelne Spiegel führt den in der gleichen Reihe befindlichen Objektiven das Licht zu, während der

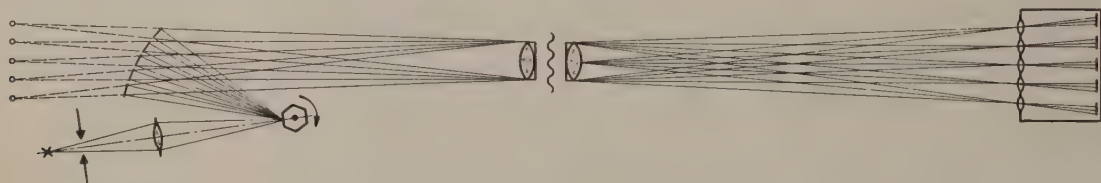


Abb. 6. Anordnung für stationäre Lichtquelle.

## 6. Die räumliche Ausmessung.

Die Genauigkeit der räumlichen Ausmessung der Lage eines Objektpunktes auf der photographischen Platte ist zunächst einmal von der Güte der abbildenden Objektivs abhängig. Da jedoch der erforderliche Bildöffnungswinkel verhältnismäßig klein ist, kann man mit einfachen Objektiv-Typen ausreichende Bildschärfe erreichen. Man kann dann mit einer optimalen Ausmeßgenauigkeit für die Objektpunkte im Bild von etwa  $10\mu$  rechnen. Die entsprechende Genauigkeit für das Objekt selbst hängt vom Abbildungsmaßstab ab. Stärkere Verkleinerung setzt die Genauigkeit herab, bringt aber größere Helligkeit. Der Abbildungsmaßstab liegt fest, wenn man eine bestimmte Anzahl von Bildern auf ein gegebenes Plattenformat bringen will. Eine Verkleinerung von  $1:10$ , wie sie etwa der Praxis entspricht, bedeutet dann eine Ausmeßgenauigkeit im Objekt von  $0,1$  mm.

Nun ist aber zu bedenken, daß die Brennweiten und die Verzeichnungen der einzelnen Objektive nicht absolut gleich sind. Es ist daher für eine genaue Ausmessung notwendig, vor dem eigentlichen Versuch

folgende Spiegel ein wenig geneigt, und die nächste Reihe belichtet.

Doppelbelichtungen werden vermieden, indem entweder die Lichtquelle selbst (z. B. eine Photoblitzlampe) nur die geeignete Leuchtdauer hat, oder aber, man verwendet zusätzlich einen mechanischen oder elektrooptischen Verschuß, der die Gesamtdauer regelt.

Man kann die mechanisch-optische Zuführung der Lichtimpulse als die Erweiterung des Prinzips der Mehrfach-Funkenkamera in den Bereich der niedrigen Bildfrequenzen ansehen.

## 8. Steuerung der Lichtimpulse durch die Laufzeit des Lichtes.

Die höchsten Bildfrequenzen mit Hilfe getrennter Funken erreicht man, wenn man diese in einer Kette ohne besondere Verzögerungsglieder unmittelbar hintereinanderschaltet. Die auf diese Weise erzielte obere Grenze ist etwa  $10^7$  sec (entsprechend einer Wellenlänge elektrischer Wellen von  $30$  m), bedingt durch die elektrischen Daten der erforderlichen Schaltelemente.

Eine höhere Frequenz läßt sich erreichen, wenn man, ausgehend von einem einzigen genügend kurzzeitigen Blitz, dessen Licht den einzelnen Strahlengängen der Anordnung auf dem Umweg über verschieden lange Lichtwege zuleitet (Abb. 7). Der erste Strahlengang wird unmittelbar ausgeleuchtet, der zweite erhält sein Licht nach einmaliger Reflexion an je 2 Hilfsspiegeln, der dritte nach je zweimaliger Reflexion usw.

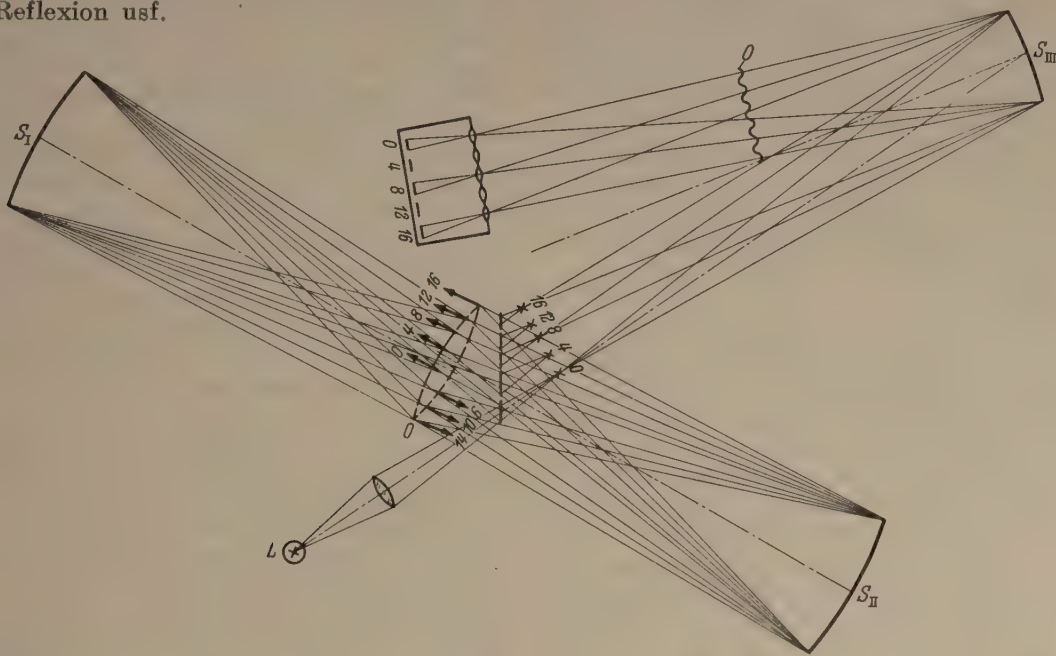


Abb. 7. Anordnung zur Speisung einer Mehrfach-Funken-Apparatur aus einem Funken L mit Hilfe verschieden langer Laufzeit des Lichtes. Durch Reflexion und Herreflexion in den Spiegeln  $S_I$  und  $S_{II}$ , die zur optischen Entzerrung der Strahlen etwas gegeneinander dejustiert sind, wird die zeitliche

9. Makro- und Mikrohochfrequenzkinematographie.  
Will man zum Studium eines bewegten Vorganges letzten Endes photographische Kopien zur Verfügung haben, auf denen die bewegten Objekte nur etwa 1 mm von Bild zu Bild verschoben sind und die noch eine ausreichende Ausmeßgenauigkeit gestatten, so ergibt sich folgende Abhängigkeit der Geschwindig-

liche Aufeinanderfolge erreicht. O Feldlinse,  $S_{III}$  Hohlspiegel der Mehrfach-Funken-Apparatur. Die Zahlen geben an, wieviel mal der betreffende Lichtstrahl die Strecke vom Krümmungsmittelpunkt bis zum Spiegel  $S_I$  oder  $S_{II}$  selbst zurückgelegt hat.

Die Laufzeit  $\tau$  bei der Reflexion an einem Spiegel läßt sich in einfacher Weise durch die Brennweite  $f$  des Spiegels regeln ( $\tau = 4f/v$ , wobei  $v$  die Lichtgeschwindigkeit ist). Es ist für

|          |               |               |               |
|----------|---------------|---------------|---------------|
| $\tau =$ | $10^{-7}$ sec | $10^{-8}$ sec | $10^{-9}$ sec |
| $f =$    | 7,5 m         | 75 cm         | 7,5 cm,       |

und man sieht, daß man grundsätzlich eine Bildfrequenz von  $10^9$  sec nach diesem Prinzip leicht erreichen kann.

Es bleibt jedoch die Aufgabe, einen ausreichend kurzen und hellen Beleuchtungsfunken zu erzeugen. Für eine Bildfrequenz von  $10^7$  sec ist die Schwierigkeit noch gering. Die Anordnung wurde für diese Frequenz praktisch erprobt<sup>1</sup>. Für die höheren Frequenzen sollte der Funke entsprechend kürzer sein (etwa 1/10 der Bildwechselzeit) und trotzdem die gleiche Lichtmenge ausstrahlen. Mit modernen Methoden wie Verwendung von Bariumtitanat als Dielektrikum in einem koaxialen Kabel als Kondensator und geeignete Parallelschaltung derartiger Kondensatoren läßt sich die realisierbare Frequenz vergrößern [4]. Entwicklungsarbeiten in dieser Richtung werden sich lohnen, wenn Probleme der technischen Physik auftreten, zu deren Lösung derart hohe Frequenzen notwendig sein werden (vgl. folgenden Absatz).

keit des Objektes von der Bildfrequenz  $f_w$  und der Vergrößerung  $V$ :

| Bildfrequenz | Vergrößerung |            |           |           |           |
|--------------|--------------|------------|-----------|-----------|-----------|
|              | 0,1          | 1          | 10        | 100       | 1000      |
| 1 000        | 10 m/sec     | 1 m/sec    | 0,1 m/sec | 1 cm/sec  | 1 mm/sec  |
| 10 000       | 100 m/sec    | 10 m/sec   | 1 m/sec   | 10 cm/sec | 1 cm/sec  |
| 100 000      | 1 000 m/sec  | 100 m/sec  | 10 m/sec  | 1 m/sec   | 10 cm/sec |
| 1 000 000    | 10 000 m/sec | 1000 m/sec | 100 m/sec | 10 m/sec  | 1 m/sec   |

Die Spalte mit der Vergrößerung 0,1 stellt den bisher meist üblichen Anwendungsbereich dar, also Vorgänge mit Geschwindigkeiten von 10 m/sec bis zu 10 000 m/sec (z. B. Detonationsvorgänge betreffend). Aber bei stärkerer räumlicher Auflösung (bis zu 1000facher Vergrößerung) erfordern wesentlich kleinere Objektgeschwindigkeiten die gleichen Bildfrequenzen. Es handelt sich in diesem Falle sozusagen um eine Mikro-Hochfrequenzkinematographie, die bisher noch wenig Anwendung gefunden hat. Aber schon das kinematographische Studium der langsamen Kristallwachstumsvorgänge erfordert Bildfrequenzen, die teilweise über derjenigen der normalen mechanischen Aufnahmegeräte liegen. So beträgt z. B. die lineare Kristallisationsgeschwindigkeit von Eis bei  $-2^\circ\text{C}$  rund 10 mm/sec [5]. Will man das Wachsen eines Eiskristalles bei 100facher Vergrößerung kinematographieren, so sind nach der obigen Tabelle 1000 Bilder/sec notwendig.

Die lineare Kristallisationsgeschwindigkeit von Phosphor bei  $25^\circ\text{C}$  beträgt sogar rund 1000 mm/sec,

<sup>1</sup> Zusammen mit W. STREUTH.

und es wären bei 100facher Vergrößerung  $10^6$  Bilder/sec notwendig!

Auch die Aufgabe, eine BROWNSche Bewegung zu vermessen, fällt in das Gebiet der Mikro-Hochfrequenzkinematographie.

Nun gibt es andere Vorgänge mit höheren Geschwindigkeiten, die im mikroskopischen Bereich interessieren (Zwillingsbildung, Gleitvorgänge, Rekristallisation, Phasenumwandlungen, magnetische Erscheinungen). Liegen diese Geschwindigkeiten über 10 m/sec, und ist eine Vergrößerung von etwa 100 zur Auflösung erforderlich, so ergeben sich Bildfrequenzen über  $10^6$ , und die im vorigen Abschnitt erwähnten Möglichkeiten gewinnen Bedeutung. Die ersten Anfänge zum Einsatz der Hochfrequenzkinematographie für das Studium derartiger Vorgänge sind gemacht. Auch in diesem Falle erweist sich die Mehrfach-Funken-Kamera als ein brauchbares Prinzip.

#### 10. Anwendung im Bereich der technischen Physik.

Der im folgenden gegebene kurze Überblick der Anwendungen bezieht sich auf die ersten beiden Spalten in der obigen Tabelle.

Geschwindigkeiten von einigen m/sec bis zu 100 m/sec sind die üblichen Größenordnungen bei technischen Maschinen und Apparaten. Es interessiert die Bewegung irgend eines Maschinenbauteils z. B. einer Feder, eines Relaisankers oder eines Schreibmaschinengelenks bei stoßweiser Beanspruchung. Mit Geheimrat NERNST zusammen wurde schon vor 25 Jahren der Anschlag einer Stahlsaite durch ein Hämmerchen hochfrequenzkinematographisch untersucht.

Das Studium des Insekten- oder Vogelfluges ist aerodynamisch interessant. Viele moderne Probleme der Windkanaltechnik lassen sich nur hochfrequenzkinematographisch lösen: Stabilität von  $\lambda$ -Stößen, Stabilität der MACHschen Welle, Wirbelbildung und -ablösung.

Ausgedehnte Bereiche der Anwendung liegen in der Ballistik, die letzten Endes den Antrieb für die Entwicklung der Hochfrequenzkinematographie gegeben hat.

Die in der obigen Tabelle angegebenen Geschwindigkeiten brauchen sich nicht auf bewegte Massenteile unmittelbar zu beziehen, auch die Ausbreitung eines Spannungszustandes bei dynamisch beanspruchten Körpern oder die Ausbreitung von Schallvorgängen fällt hierunter. Technische Anwendungen liefern z. B. Probleme der Bauakustik (im Modellversuch), Ausbreitung von Stoßvorgängen in festen Körpern mit Hilfe der im Abschnitt 3 erwähnten Methoden oder auch dadurch, daß man den zu untersuchenden Körper ins Wasser bringt und die Rückwirkung auf das Wasser mit Hilfe der Schlierenmethode aufnimmt.

Ein in Zukunft sicher noch sehr wichtiges Gebiet dürfte die Untersuchung der Bruchvorgänge sein; die normalen Zerreißgeschwindigkeiten haben sehr hohe Werte (z. B. bei Tafelglas 1500 m/sec).

Bei starken Anregungen treten Stoßwellen auf, die zahlreiche neue Probleme aufwerfen, die z. T. bisher nur experimentell gelöst werden können.

Diese Andeutungen des umfangreichen Anwendungsbereiches mögen hier genügen.

#### Zusammenfassung.

Nach einer kurzen Betrachtung über die Stellung der „Technischen Physik“ wird auf die „Mehrfach-Funken-Kamera“ eingegangen, die sich bei der Untersuchung von Bewegungsvorgängen aus dem Bereich der technischen Physik bewährt hat. Eine Reihe von bisher nicht veröffentlichten praktisch erprobten Erweiterungen des Prinzips werden beschrieben. Darüber hinaus werden einige Ausblicke auf weitere Möglichkeiten gegeben. Am Schluß sind einige Anwendungsgebiete aus dem Bereich der technischen Physik zusammengestellt.

**Literatur.** [1] CRANZ, C. u. H. SCHARDIN: Z. Physik **56**, 147 (1929). — [2] SCHARDIN, H.: Glastechn. Ber. **23**, 1, 67, 325 (1949). — [3] FAYOLLE, P. u. P. NASLIN: Mém. de l'Art. fr. **22**, 657 (1948); **23**, 7 (1949). Vgl. auch den demnächst im Journ. Motion Pict. and Telev. Eng. erscheinenden Vortrag von P. NASLIN, gehalten auf dem Symposium on High-Speed Photography in Washington (Okt. 1952). — [4] SCHARDIN, H. u. E. FÜNFER: Z. angew. Physik **4**, 224 (1952). — [5] BUKLEY, H. E.: Crystal Growth. Verlag Chapman u. Hall, London 1951.

Prof. Dr. HUBERT SCHARDIN, Weil am Rhein.

## Über gegengekoppelte Gleichstromverstärker.

Von ALFRED EHMERT, Weißenau.

(Aus der Forschungsstelle für Physik der Stratosphäre, Weißenau Krs. Ravensburg.)

Mit 11 Textabbildungen.

(Eingegangen 27. August 1952.)

Die Verwendung der Gegenkopplung zur Erzielung definierter Steilheit und zur Verbesserung der Eingangskapazität und des Eingangswiderstandes von Gleichstromverstärkern wird diskutiert und dabei auf eine Möglichkeit zur nahezu verlustlosen Strom- und Spannungsmessung hingewiesen. 4 Beispiele der Ausführung einfacher Gleichstromverstärker mit sehr hohem Eingangswiderstand werden angegeben und ihre Leistung diskutiert. Der gegengekoppelte Röhrenverstärker der beschriebenen Bauart ist auch ohne mechanisch bewegte Teile wegen seiner geringen Eingangskapazität den Elektrometern

bei der Strommessung überlegen und erlaubt dabei die Steuerung von Schreibern. Eine Änderung der Gitterladung um 1000 Elektronen kann am Schreiber noch abgelesen werden. Die 0-Punkt-Stabilität ist so groß, daß eine Nachprüfung pro Tag ausreichend ist. Selbst bei schwächsten Strömen wird eine schnelle Einstellung erzielt.

#### A. Prinzipielles.

Die Bedeutung des Prinzips der Gegenkopplung für die Linearisierung von Kennlinien und zur Einschränkung der Abhängigkeit dieser Kennlinien von

n Röhrendaten ist aus zahlreichen Arbeiten bekannt (siehe u. A. [1]—[4]). Weniger beachtet sind die möglichen Verbesserungen des Verstärkereingangs durch Anwendung der Gegenkopplung und die damit möglichen Anpassungen an das Meßproblem. Wir wollen hier in aller Kürze einige prinzipielle Möglichkeiten skizzieren und dann an wenigen praktischen Beispielen den Gewinn für die Praxis zeigen. Wir wollen uns hier auf den übersichtlicheren Fall des Gleichstroms beschränken.

Für Spannungsmessungen benützt man Röhrenverstärker, wenn die Meßspannung nicht mit dem Strom belastet werden darf, welchen das benützte Anzeigeinstrument benötigt. Im Idealfall wird die Meßspannung überhaupt nicht belastet. Der Eingangswiderstand der Meßanordnung wäre dann unendlich und der Meßvorgang bliebe ohne Rückwirkung auf den Stromkreis, in welchem die zu messende Spannung auftritt.

Entsprechend darf bei Strommessungen im Idealfall der zur Strommessung benützte Verstärker den Stromkreis, in welchem der zu messende Strom fließt, nicht mit einem Spannungsabfall an einem zusätzlichen Widerstand belasten.

In Abb. 1 bedeute der mit  $S$  bezeichnete Teil einen Verstärker, der bei der Spannung  $u_{12}$  zwischen den Klemmen 1 und 2, zwischen den Klemmen 3 und 4 einen Strom  $I = S \cdot u_{12}$  liefere, wobei die Steilheit  $S$  zunächst unabhängig vom Außenwiderstand sein möge. Der Verstärker belaste die Spannung  $u_{12}$  mit dem Widerstand  $R_e$  und der Kapazität  $C_e$ . Wenn die Klemme 1 positiv gegen die Klemme 2 ist, sei die Klemme 4 positiv gegen die Klemme 3.

Die Gegenkopplung des Spannungsabfalles, welcher den Ausgangsstrom  $I$  am Gegenkopplungswiderstand  $R_{gK}$  in Abb. 1 erzeugt, bewirkt, daß

$$u_e = u_{12} + I \cdot R_{gK} \quad (1)$$

erhält.

Mit  $I = S \cdot u_{12}$  erhält man

$$I = \frac{u_0}{R_{gK} (1 + 1/R_{gK} \cdot S)} \quad (2)$$

der die Steilheit der ganzen Anordnung  $\bar{S}$

$$\bar{S} = \frac{\Delta I}{\Delta u_e} = \frac{1}{R_{gK}} \cdot (1 + 1/R_{gK} \cdot S)^{-1} = S/(1 + R_{gK} \cdot S). \quad (3)$$

Wenn  $R_{gK} \cdot S \gg 1$  ist, so ist  $\bar{S}$  weitgehend unabhängig von  $S$ , aber dafür viel kleiner als  $S$ . Die Definiertheit von  $\bar{S}$  ist mit einer Herabsetzung der Steilheit erkauft.

Die Ausgangsspannung wird  $u_a = R_{gK} \cdot I \approx u_e$ , doch immer etwas kleiner als die Eingangsspannung.

Wir definieren als Übertragungsverlustfaktor  $\bar{u}$

$$\bar{u} = \frac{u_e - u_a}{u_e} = 1/(1 + R_{gK} \cdot S). \quad (4)$$

der Widerstand  $R_e$  belastet, wenn er groß gegen  $R_{gK}$

ist, die Spannung  $u_e$  mit dem Strom

$$I_e = \frac{u_e - R_{gK} \cdot I}{R_e} = \frac{u_e}{R_e \cdot \bar{u}} \quad (5)$$

und man erhält als wirksamen Eingangswiderstand der Anordnung in Abb. 1

$$\bar{R}_e = \frac{\Delta u_e}{\Delta I_e} = \frac{R_e}{\bar{u}} = R_e (1 + R_{gK} \cdot S), \quad (6)$$

also eine wesentliche Verbesserung, da  $R_{gK} \cdot S \gg 1$  sein soll.

Wird auf die Klemme 1 die Ladung  $Q_e$  gebracht, so entsteht im ersten Augenblick die Eingangsspannung  $u_e$ :

$$u_e = Q_e / \bar{C}_e = u_{12} + R_{gK} I = Q_e / C_e \cdot \bar{u}, \quad (7)$$

die wirksame Kapazität  $\bar{C}_e$  der Anordnung ist also

$$\bar{C}_e = Q_e / u_e = C_e \cdot \bar{u} = C_e / (1 + R_{gK} \cdot S). \quad (8)$$

Sie ist also wesentlich kleiner als die Eingangskapazität des Verstärkers  $S$  allein.

Schickt man von außen einen Strom  $I_e$  durch die Eingangsklemmen  $A$  und  $B$  so erhält man denselben Ausgangsstrom  $I$  wie mit dem Verstärker  $S$  allein, aber eine Ausgangsspannung

$$u_a = R_{gK} \cdot I = R_{gK} \cdot S \cdot I_e \cdot R_e,$$

also eine Spannungsverstärkung, wobei der den Strom  $I_e$  liefernde Kreis mit dem Widerstand

$$R_e / \bar{u} = R_e (1 + R_{gK} \cdot S)$$

belastet wird. Eine solche Verwendung zur Strommessung ist widersinnig. Die Anordnung in Abb. 1 ist umgekehrt für die Spannungsmessung mit veringerteter Belastung der Meßspannung geeignet.

Ebenso bringt eine bei geerdeter Klemme  $B$  (Abb. 1) auf die Klemme  $A$  gebrachte Ladung  $Q_e$  im ersten Augenblick ( $t \ll R_e C_e$ ) denselben Strom hervor, wie wenn sie bei geerdeter Klemme 2 auf die Klemme 1 gebracht worden wäre.

Das hohe Verhältnis der unveränderten Ladungsempfindlichkeit zur stark reduzierten Spannungsempfindlichkeit der Anordnung nach Abb. 1 gegenüber dem Verstärker  $S$  allein bedingt eine große Verbesserung der Einstellgeschwindigkeit für den Fall, daß die zu messende Spannung von einer Anordnung mit hohem Innenwiderstand  $R_i$  geliefert wird. Es muß jetzt nur die Kapazität  $\bar{C}_e$  aufgeladen werden. Das geschieht mit der Zeitkonstanten  $C_e \cdot R_i \cdot \bar{u}$ .

Im Endausschlag wird in diesem Fall statt  $u_x$  die um  $I_e \cdot R_i$  verminderte Spannung angezeigt, also nach Abb. 1

$$u_e = u_x \cdot \left(1 - \frac{\bar{u} R_i}{R_e + \bar{u} R_i}\right), \quad (9)$$

statt

$$u_x \left(1 - \frac{R_i}{R_e + R_i}\right)$$

beim Verstärker  $S$  allein.

Die durch die Gegenkopplung in Kauf genommene Einbuße an Empfindlichkeit bedingt also bei der Messung von Spannungen mit hohem innerem Widerstand der Spannungsquelle neben dem Gewinn an Definiertheit der Empfindlichkeit sowohl eine starke Verminderung der Fehlanzeige als auch eine ebenso große Verbesserung der Einstellgeschwindigkeit.

Die Leistungsverstärkung  $V_L$  der Anordnung nach Abb. 1 wird:

$$V_L = \frac{I^2 \cdot R_{gK}}{u_e^2 / R_e} = \frac{u_e^2 \cdot R_e (1 + R_{gK} \cdot S)}{R_{gK} \left(1 + \frac{1}{R_{gK} \cdot S}\right)^2 \cdot u_e^2} = R_e \cdot S \left(1 + \frac{1}{R_{gK} \cdot S}\right). \quad (10)$$

Zur Messung von Strömen mit dem Verstärker  $S$  müssen diese über einen bekannten Widerstand  $R_M$  geleitet und dann die Spannung  $R_M \cdot I_e$  gemessen werden.

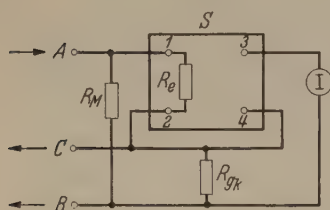


Abb. 2. Gegenkopplung zur Strommessung mit dem Verstärker  $S$ . Der bei  $A$  zugeführte und bei  $C$  abgenommene Eingangsstrom erzeugt an  $R_M$  die Eingangsspannung. Diese wird für den Außenkreis an  $R_{gK}$  weitgehend kompensiert.

$$R_M \gg R_{gK}.$$

Wird nach Abb. 2 der zu messende Strom  $I_x$  bei der Klemme  $A$  zugeführt und bei der Klemme  $B$  abgenommen, so ist nach [2]

$$I = \frac{R_M}{R_{gK}} \cdot \frac{1}{(1 + 1/R_{gK} \cdot S)} \cdot I_x \approx \frac{R_M}{R_{gK}} \cdot I_x, \quad (11)$$

mit der Bedingung

$$R_M \ll R_e / \ddot{u}. \quad (12)$$

Die Leistungsverstärkung  $V'_L$  ist in diesem Fall:

$$V'_L = \frac{R_M}{R_{gK} \left(1 + \frac{1}{R_{gK} \cdot S}\right)^2} \approx \frac{R_M}{R_{gK}}. \quad (13)$$

Man kann  $R_M$  um den Faktor  $1/\ddot{u}$  ( $\approx R_{gK} \cdot S$ ) mal größer machen, als man das ohne die Gegenkopplung mit dem Verstärker  $S$  allein konnte (denn dann müßte  $R_M \ll R_e$  sein), und hat trotz dem Vorteil einer von  $S$  weitgehend unabhängigen, durch  $R_M$  und  $R_{gK}$  definierten Stromverstärkung eine etwa ebenso große Stromverstärkung wie sie mit dem Verstärker  $S$  allein erreicht werden könnte. Allerdings ergibt sich ein  $1/\ddot{u}$  mal größerer Spannungsabfall, dessen Rückwirkung auf den Stromkreis, der den Strom  $I_e$  liefert, nur tragbar ist, wenn dieser Stromkreis noch wesentlich größere Widerstände und Spannungen enthält, welche groß gegen  $I_x R_M$  sind.

Führt man aber den zu messenden Strom  $I_x$  bei der Klemme  $A$  zu und bei der Klemme  $C$  ab, so ist für den Fall, daß  $R_M \ll R_{gK}$  ist, die Stromverstärkung unverändert, der Spannungsabfall zwischen  $A$  und  $C$  aber nur

$$u_{AC} = I_x \cdot R_M \cdot \ddot{u} \quad (14)$$

und die Leistungsverstärkung

$$V''_L = \frac{R_M}{R_{gK}} \cdot \frac{(1 + R_{gK} \cdot S)}{(1 + 1/R_{gK} \cdot S)^2} \approx R_M \cdot S. \quad (15)$$

Der Spannungsabfall  $R_M \cdot I_x$  wird erzeugt und zur Messung ausgenutzt. Aber für den Stromkreis von  $I_x$  wird er durch die Gegenspannung an  $R_{gK}$  bis auf den kleinen Bruchteil  $\ddot{u}$  wieder kompensiert. Das Verfahren setzt voraus, daß der Verstärker  $S$  bei der Spannung  $u_{12} = 0$  keinen Strom über die Klemmen 3 und 4 gibt. Dieser muß sonst sorgfältig kompensiert werden.

Darüber hinaus konnten wir auch den nach Abb. 2 verbleibenden Spannungsabfall  $R_M \cdot I_x \cdot \ddot{u}$  noch weiter automatisch kompensieren, indem nach Abb. 3 die Anordnung um den Widerstand  $R_K$  erweitert wurde, der in die Gegenkopplung nicht einbezogen ist, und indem der über die Klemme  $A$  zugeführte Strom  $I_x$  über die Klemme  $D$  abgenommen wurde.

Volle Kompensation des Spannungsabfalls ist zu erwarten, wenn

$$\frac{R_K}{R_{gK} + R_K} = \ddot{u} \quad \text{und damit} \quad R_K = \frac{1}{S} \quad (16)$$

ist.

Für  $R_K > \frac{1}{S}$  stellt die Anordnung nach Abb. 3 für den Stromkreis, der  $I_x$  liefert, einen negativen Widerstand dar. Das ist auch bei Gleichstrom in manchen Fällen zur Kompensation eines positiven Widerstandes sehr nützlich.

Bei kurzgeschlossenen Klemmen  $A$  und  $D$  kann man  $S$  rasch bestimmen, indem man einen geeichten Widerstand  $R_K$  so lange vergrößert, bis der Verstärker instabil wird. (Es bleibt ein kleiner Fehler wegen der statistischen Schwankung der Steilheit  $S$ ; man schaltet zweckmäßig eine Kapazität zwischen  $A$  und  $C$ .)

Man könnte daran denken, den Verstärker  $S$  in Abb. 3 selbst mit einem anderen Verstärker  $S_1$  in der Schaltung nach Abb. 1 aufzubauen, dessen Steilheit durch einen Widerstand  $R_{gK1}$  definiert wäre und der gleich  $R_K$  zu wählen wäre. Man muß dann fordern, daß  $S_1 \gg S$  ist und erhält genau Abb. 2 mit  $S_1$  statt  $S$  und  $R_{gK} + R_K$  statt  $R_{gK}$ . Man hätte durch Vergrößerung von  $S$  eben den schädlichen Spannungsabfall  $R_M \cdot I_x \cdot \ddot{u}$  entsprechend verkleinert.

In der Praxis passen wir  $R_K$  der Steilheit  $S$  des Verstärkers so an, daß der Verstärker noch stabil bleibt. Wie weit man gehen kann, hängt von den Schwankungen von  $S$  und vom angeschlossenen Stromkreis ab. Die Leistungsverstärkung der Gesamtanordnung wird so nochmals auf ein Mehrfaches vergrößert.

Das Verfahren dieser automatischen Kompensation erschließt dem Röhrenverstärker (der immer eine gewisse Eingangsspannung benötigt) mit direkter Anzeige zahlreiche Anwendungen, die bisher nur mit manueller Kompensation und 0-Verstärker zugänglich waren. Die gegengekoppelten Anordnungen nach Abb. 1 und 2 können als Kompensationsanordnungen aufgefaßt werden, wobei der Verstärker  $S$  die Einstellung der Kompensation bis auf einen Rest vornimmt, der zur Steuerung von  $S$  benötigt wird. Die Anordnung nach Abb. 3 kompensiert noch einen Teil dieses Restes. Mit  $R_K = 1/S$  ist die Spannung  $DB$  in Abb. 3 gleich der Eingangsspannung  $AB$ . Die Einschaltung einer Kapazität oder eines Widerstandes zwischen  $A$  und  $D$  verändert also an der Anzeige nichts. Damit können Abschirmungskapazitäten und die Isolationsmängel der

leitung zur Klemme 1 weitgehend unschädlich ge-  
acht werden. Die Abschirmung wird bei  $D$  an-  
geschlossen und ebenso Schutzringe um die Isolation  
mit der Klemme 1 (oder  $A$ ) verbundenen Teile.  
Diese Maßnahmen sind von besonderer Wichtigkeit,  
wenn die Anordnung nach Abb. 3 unter Weglassung  
von  $R_M$  als Elektrometer verwendet werden soll.

Darüber hinaus kann für die Spannungsmessung  
der Eingangswiderstand noch über den in Gleich-  
ung 6 angegebenen Betrag hinaus erhöht werden,  
wenn nach Abb. 4  $R_{K2}$  so groß gemacht wird, daß  
das Potential der Klemme 4 stärker variiert als das-  
jenige von Klemme 1 und nun der Klemme 1  
über  $R$  ebenso viel Ladung zugeführt wird wie  
im Verstärker über  $R_e$  verloren geht. Man kann  
die Einstellung wieder empirisch ermitteln. Bei  
zu großem  $R_{K2}$  tritt Instabilität ein.  $R$  muß  
mit  $R_e$  vergleichbar sein. Voraussetzung ist hier  
in besonderem Maße, daß für  $u_{12}=0$  auch  $I_{3,4}$   
verschwindet.

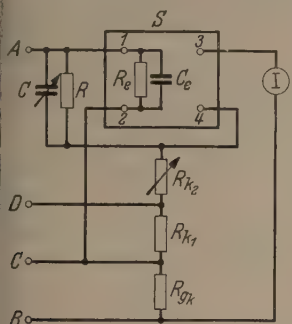


Abb. 4. Zur Kompensation des Verstärkerstromes über  $R_e$  und der die Einstellung verzögernden Kapazität  $C_e$  wird an  $R_{K2}$  eine Überspannung erzeugt.

Ebenso kann die verzögernde Wirkung der Kapazität  $C_e$  durch eine einstellbare Neutralisationskapazität  $C$  verringert werden.

Wenn die Kennlinie des Verstärkers  $S$  in den Anwendungen nach Abb. 1 bis 4 nicht linear ist, so tritt, wie sich leicht zeigen läßt, trotzdem eine weitgehende Linearisierung der Anzeige ein, aber der wirksame Eingangswiderstand  $\bar{R}_e$  wird dann von der Eingangsspannung abhängig. Deshalb muß dann vor allem bei Strommessungen nach Abb. 2  $R_M \ll R_e / \bar{u}$  bleiben. Die Schaltungen nach Abb. 3 und Abb. 4 haben in diesem Fall nicht über den ganzen Bereich dieselbe Wirksamkeit. Dank der Gegenkopplung kommen an den Eingang des Verstärkers  $S$  nur Spannungen vom  $\bar{u}$ -fachen des Meßbereiches und für so kleine Spannungen läßt sich die Linearität ausreichend verwirklichen.

Die Anordnungen nach Abb. 3, 4 und 5 setzen voraus, daß der Eingangs- und der Ausgangskreis intern des Verstärkers  $S$  nicht verbunden sind.

### B. Die Realisierung.

Für den praktischen Aufbau der beschriebenen Anordnung kommt es zunächst auf die Realisierung des Gleichstromverstärkers  $S$  an. Bei den besten Ausführungen wird durch periodisch veränderte Kapazitäten die Gleichspannung am Eingang in eine Wechselspannung übergeführt und diese liefert nach einer Verstärkung und phasengesteuerter Gleichrichtung einen der Eingangsspannung proportionalen Ausgangsstrom. Die Gegenkopplung sichert dann eine konstante Gesamtsteilheit der Anlage und vergrößert die Eingangskapazität. Hier wollen wir zeigen, daß durch die Verwendung der Gegenkopplung nach den entwickelten Grundsätzen schon mit sehr einfach und billig aufgebauten Röhrenverstärkern gute „Elektrometer“ und „Galvanometer“ gebaut werden können. Nur zur Messung

sehr kleiner Spannungen ( $< 10$  mV) sind diese Verstärker nicht geeignet. Hier ist das oben erwähnte Prinzip überlegen.

Die einfache Triode ist der einfachste Röhrenverstärker, welcher in Abb. 1 und 2 an die Stelle von  $S$  gesetzt werden kann. Abb. 5 zeigt die Verbindung mit Abb. 1 und 2. Es sind an allen Punkten dieselben Bezeichnungen gewählt. Der Anodenstrom ist in bekannter Weise kompensiert. Man regelt den Widerstand  $R_K$  so ein, daß bei kurzgeschlossenen Klemmen  $A$  und  $B$  im Instrument kein Strom fließt und wählt die Anodenspannung so, daß bei freiem Gitter und bei kurzgeschlossenem Eingang  $A, B$  das Instrument stromlos ist.

Durch abwechselndes Verändern von  $U_A$  und von  $R_{gK}$  kommt man rasch zu diesem geeignetsten Arbeitspunkt.

Mit der Näherung der Röhrenkennlinie durch die Röhrgleichung

$$I = (u_{gK} + U_0 + D \cdot U_{aK}) \cdot S \quad (17)$$

( $D$  Durchgriff,  $S$  statische Steilheit)

erhält man für die beschriebene Kompensation die Betriebsgleichung, sofern  $R_K \gg R_{gK}$  ist,

$$I = \frac{u_e + U_0 + D \cdot U_A}{R_{gK} \cdot (1 + D + 1/S \cdot R_{gK})} - I_K \quad (18)$$

und den Übertragungsverlustfaktor

$$\bar{u} \approx D + \frac{1}{R_{gK} \cdot S}. \quad (19)$$

Um mit  $S = 1/500$  A/V genügende Unabhängigkeit von  $S$  zu erhalten muß  $R_{gK} \geq 5000 \Omega$  gewählt werden, womit  $\bar{S} \leq 0,2$  mA/V wird. Arbeitet man mit einem Zeigergalvanometer und  $R_{gK} = 10^5 \Omega$ , also  $\bar{S} = 10^{-5}$  A/V, so arbeitet die einfache Anordnung schon sehr stabil, vorausgesetzt, daß die Heizung sehr konstant gehalten wird. Denn Änderungen der Heizung bewirken eine Änderung der Röhrenkonstanten  $U_0$  (Gl. (17)). Man erreicht einen Eingangswiderstand  $\bar{R}_e$  von der Größenordnung  $10^{10} \Omega$ .

Der Durchgriff  $D$  tritt in den Gleichungen (18) und (19) auf, weil bei sich ändernder Eingangsspannung die Spannung zwischen Anode und Kathode der Röhre eine entgegengesetzte Änderung erfährt. Durch diese Kopplung bleibt  $\bar{u}$  immer größer als  $D$ . Eine Schirmgitterröhre würde für das Schirmgitter eine getrennte Spannungsquelle erfordern, die belastet würde und peinlich konstant zu halten wäre. Wir haben einen anderen Ausweg gefunden, welchen Abb. 6 im Prinzip zeigt. Die Schwankungen des Potentials der Kathode der Röhre 1 werden über die Batterie  $U_B$ , welche nicht belastet wird, auf das Gitter der Röhre 2 übertragen. Die Röhre 1 und  $R_{gK}$  stellen zusammen den Kathodenwiderstand für die

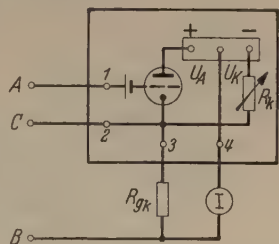


Abb. 5. Die einfache Triode als Verstärker  $S$  in den Schaltungen nach Abb. 1 und Abb. 2. Abb. 3 und Abb. 4 können damit nicht aufgebaut werden.

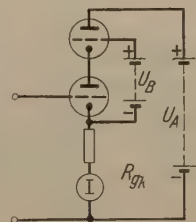


Abb. 6. Anordnung zur besseren Konstanthaltung der Anodenspannung der Eingangsrohre mit Kathodenwiderstand.



ger werden die Verhältnisse bei noch kleineren ömen. Mit  $R_{gK} = 4 \text{ M}\Omega$  und  $R_K = \text{max. } 4 \text{ M}\Omega = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ A/V}$  werden mit einer guten Röhre  $\sqrt{12 \text{ P 2000}}$  mit Zuführung der Spannung über  $\cdot 10^{11} \Omega$  keine meßbaren Unterschiede gegenüber n direkten Anlegen der Spannung festgestellt. i einer „schlechten“ Röhre, die zudem erst ins- samt 24 Stunden im Betrieb war, wurde dagegen Eingangswiderstand von nur  $6,0 \cdot 10^{12} \Omega$  er- cht. Der Gitterstrom betrug dabei bei  $+1 \text{ Volt}$  t  $1,7 \cdot 10^{-13} \text{ A}$  und war im ganzen Meßbereich oportional zur Eingangsspannung. Die Spannung s Akkumulators  $B_3$  betrug dabei nur Volt.

Die geringe wirksame Kapazität führt ch bei sehr hohem innerem Widerstand n  $u_e$  zu rascher Einstellung.

Die Kompensationsmethode nach Ab- bildung 4 und Abb. 3 sind mit dieser An- ordnung nicht möglich. Strommessungen ch Abb. 2 sind möglich, aber unter Um- inden durch den hohen Widerstand  $R_{gK}$  hindert.

Ein Verstärker nach demselben Prinzip r einen Meßbereich von  $-500$  bis  $+500$  olt bei vollständigem Netzbetrieb mit tomatischer Kompensation der Netz- annungsschwankungen wird an an- rer Stelle beschrieben [5].

Zum Betrieb von Schreibern gibt der eine Verstärker nach Abb. 7 zu wenig rom. Man kann aber an die Stelle des trumentes einen Photozellenkompen- or schalten, wie ihn verschiedene Firmen zur essung von Thermospannungen liefern. Diese Ge- te werden durch den Vorsatz dieses Verstärkers ch für elektrometrische Messungen anwendbar.

Zu einer Gesamtsteilheit von  $10^{-4} \text{ A/V}$  kommt an leicht nach Abb. 8 mit einer dritten Röhre. Zur euerung der Röhre 3 wird der Spannungsabfall am iderstand  $R_2$  des Anodenstromes der Röhre 1 be-utzt. Die Spannung, welche der Heizstrom der öhren 1 und 2 an den Widerständen  $R_3$  bis  $R_6$  er-ugt, kompensiert einerseits wie oben beschrieben e Wirkung von Schwankungen des Heizstromes<sup>1</sup> d bringt andererseits das Gitter der Röhre 3 in en günstigen Arbeitspunkt. Eine Änderung der pannung zwischen  $A$  und  $C$  hat nach Gl. (20) eine t ebenso große Spannungsänderung zwischen  $D$  nd  $C$  zur Folge, von der nur die Hälfte zwischen  $E$  nd  $C$  auftritt und die Röhre 3 steuert. Es wird nur ese Hälfte verwendet um auch bei schwachen Gitter- römen der Röhre 3 noch einen hohen Kathoden- iderstand der Röhre 1 zu erhalten. Die Schaltung t dadurch anpassungsfähiger.

Als steuernde Spannung der Röhre 3 tritt bei ner Eingangsspannung  $\Delta u_e = \Delta u_{A \rightarrow B}$  beim Strom  $I$  n Instrument ( $\bar{I}$ ) nur der Anteil  $\frac{1}{2}(\Delta u_e - R_{gK} \cdot \Delta I)$  uf und man erhält für die Änderung  $\Delta I$  des Aus- gangstromes unter Vernachlässigung des sehr kleinen bertragungsverlustes der Röhre 1

$$I = \frac{\Delta u_e - R_{gK} \cdot \Delta I}{2} \cdot S'_3 \cdot (1 - D_3) \quad (22)$$

<sup>1</sup> der Röhren 1 und 3.

mit

$$S'_3 = S_3 \cdot \frac{R_7 + R_8}{R_7 + R_8 + R_{gK}} \quad (22)$$

Der Faktor  $S'_3$  berücksichtigt, daß der Anodenstrom der Röhre 3 nur teilweise über das Instrument geht, also größer als  $I$  ist.

$$\Delta I = \frac{1}{R_{gK}} \cdot \frac{\Delta u_e}{\left(1 + \frac{2(1 + D_3)}{R_{gK} \cdot S'_3}\right)} \quad (23)$$

Die der Abb. 6 entsprechende Anordnung der Röhren 1 und 2 muß also von der Eingangsspannung

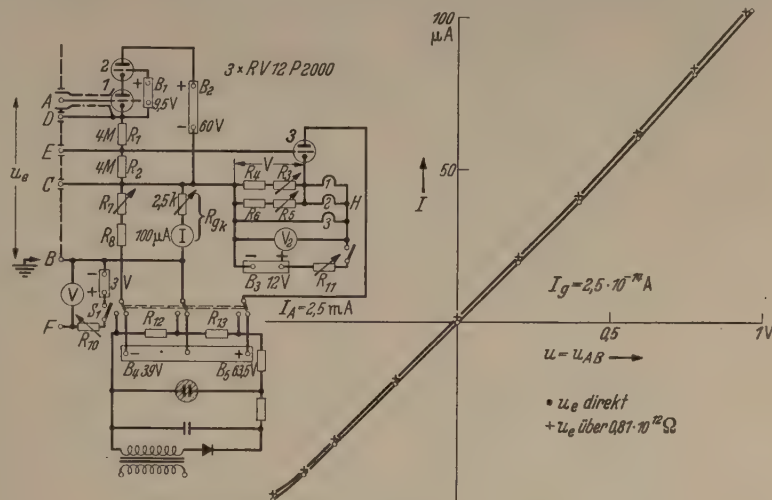


Abb. 8. Ein Röhrenelektrometer mit sehr hohem Eingangswiderstand bei technischen Röhren. Dazu die Eichkurve und die Anzeige, wenn dieselbe Spannung über  $0,81 \cdot 10^{12} \Omega$  angelegt wird.

$\Delta u_{A \rightarrow B} = \Delta u_e$  nur den Bruchteil

$$\Delta u_{AC} = \Delta u_{AB} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + 2/R_{gK} \cdot S'_3}\right) \approx \frac{\Delta u_{AB} \cdot 2}{R_{gK} \cdot S'_3}$$

verarbeiten, womit entsprechend den Ausführungen zu Gl. (6) der innere Widerstand zwischen den Klemmen  $A$  und  $B$  nochmals  $\left(1 + \frac{R_{gK} \cdot S'_3}{2}\right)$  mal ( $\approx 11$ mal) größer als der zwischen den Klemmen  $A$  und  $C$  ist.

$R_7$  wird so eingestellt, daß für  $U_{AB} = 0$  (dazu werden  $A$  und  $F$  verbunden und  $S_1$  geöffnet) auch  $I = 0$  ist. Dann wird durch Schließen von  $S_1$  und Betätigen von  $R_{10}$  die Eingangsspannung auf  $+1 \text{ Volt}$  gebracht und  $R_{gK}$  so eingestellt, daß  $I = 100 \mu\text{A}$  ( $= \text{Vollauschlag}$ ) wird. Der Nullpunkt wird dadurch nicht mehr beeinflusst.

Die Spannungen der Batterien  $B_4$  und  $B_5$  sind so zu wählen, daß dann  $U_{AD}$  bei  $U_{AB} = 0$  einen negativen Wert hat und  $U_{AD}$  bei der Spannung von  $B_1$  auf das breite Maximum des positiven Gitterstromes fällt. Der Gitterstrom ist dann über den ganzen Meßbereich fast konstant, weil sich durch die doppelte Gegenkopplung die Spannung  $U_{AC}$  nur sehr wenig ändert. Aus der Eichkurve in Abb. 8 ergibt sich dieser Gitterstrom zu  $2,5 \cdot 10^{-14} \text{ A}$ .

Bei stärkerer Heizung ist dieser „verkehrte“ Gitterstrom durch Elektronen verringert. Mit  $U_{B3} = 8 \text{ Volt}$  erreicht er  $7,5 \cdot 10^{-14} \text{ A}$ .

Bei diesem Arbeitspunkt kann nicht mit freiem Gitter gearbeitet werden. Für Strommessungen benutzt man einen Widerstand von  $10^{12} \Omega$  parallel zum Verstärkereingang und kompensiert bei abgeschalte-



2. Bei freiem Gitter  $A'$  soll dieses sich auf das Potential von  $B$  einstellen.
3. Die Batterie  $B_2$  soll dabei einen vorgegebenen Wert (z. B. eine Zelle) haben können, damit sie nicht Spannungsteilern belastet werden muß, ebenso die Spannung von  $B_1$  (mit  $10 \mu A$  belastet) ein festes Vielfaches der Zellenspannung sein.

Diese Bedingungen lassen sich durch Variation der Zellenzahl von  $B_1$  und durch Variation von  $R_{gK1}$  erfüllen.

Wir nennen derartige Verstärker *Schleppverstärker*, weil die Vorstufe nur das Potential  $A$  bei Potentialänderungen von  $A'$  nachzuschleppen hat.

Es seien noch zwei Realisierungen des Verstärkers  $S_2$  in Abb. 9 gezeigt. In Abb. 10 bilden die Röhren 2 u. 3 den Verstärker  $S_2$  in Abb. 9. Die Röhren sind in gleicher Weise bezeichnet. Die Röhre 2 verstärkt die Spannungsänderungen  $\Delta u_{AC}$  zum Punkt  $E$  im Verhältnis

$$\frac{\Delta u_{EC}}{\Delta u_{AC}} = - \frac{R_{a2}}{R_{K2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{S_2 \cdot R_{K2}} + D_2 \cdot \frac{R_{a2} + R_{K2}}{R_{K2}}} \quad (24)$$

eine einfache Rechnung zeigt, daß Schwankungen der Batteriespannung  $B_2$  auf das Potential der Klemme  $E$  ohne Einfluß bleiben, wenn am Potentiometer  $P$  mit dem Gesamt Widerstand  $P$  der Widerstand  $P_1$  abgegriffen wird:

$$P_1 = P \cdot \frac{D \cdot R_{a2}}{R_{K2} \cdot \left(1 + \frac{1}{S_2 \cdot R_{K2}} + D \cdot \frac{R_{a2} + R_{K2}}{R_{K2}}\right)}$$

Man schaltet damit den 0-Punktseinfluß von  $B_2$  aus. Für  $U_{AC} = 0$  soll  $U_{EC} \approx -2$  Volt betragen, damit der Röhre 3 kein Gitterstrom fließt. Man kann in der Gitterzuleitung die eingezeichnete Batterie einsetzen oder auch den Abgriff von  $P$  um so viel mehr zum negativen Ende drehen. Der Einfluß von Spannungsänderungen der Batterie  $B_2$  ist dann noch geringer. Wenn die Röhre 1 mitverwendet wird, kommt man mit  $B_5$  und Regulierung von  $R_{gK1}$  allein zum Ziel. Die Röhre 3 arbeitet mit  $R_{gK3}$  als Kathodenwiderstand. Führt man die Eingangsspannung zwischen den Klemmen  $A$  und  $B$  zu, so wird die Spannung zwischen  $A$  und  $C$

$$U_{AC} = U_{AB} - I_3 R_{gK2}.$$

Man erhält die Betriebssteilheit mit (24) zu

$$\frac{\Delta I}{\Delta u_e} = - \frac{1}{R_{gK2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{V_2} \cdot (1 + D_3 + 1/S_3 \cdot R_{gK2})} \quad (25)$$

(25) zeigt, daß man mit  $S_3 \cdot R_{gK2}$  bis zu Werten von etwa 1 heruntergehen kann, womit  $\bar{S} \approx S_3$  wird, der bei Zunahme von  $S_3$  auf den doppelten Wert nur etwa 5% zunimmt. Man reguliert in der Praxis  $R_{gK2}$  so ein, daß man eine passende Steilheit, (z. B. 1 mA/Volt) erhält und kontrolliert diese von Zeit zu Zeit. Haben das Potentiometer  $R_2$  und der Strommesser  $I$  zusammen genau  $1000 \Omega (= 1/\bar{S})$ , so wird die Klemme  $D$  auf dem Potential der Eingangsklemme  $A$  gehalten.

Der innere Widerstand der Röhre 3 zusammen mit  $R_{gK2}$  beträgt

$$R'_{i3} = \frac{\Delta u_{FC}}{\Delta I_3} \approx R_{gK2}/D_3.$$

Macht man  $R_K$  ebenso groß und wählt die Spannungen  $B_3$  und  $B_4$  entsprechend, so ist auch die Spannung  $(B_3 + B_4)$  ohne Einfluß auf die Anzeige. Änderungen um  $\pm 30\%$  bleiben ohne ablesbaren Einfluß, weil die zunächst verbleibenden Reste über die Gegenkopplung weitgehend ausgeregelt werden. Man kann also  $B_2$  und  $B_3 + B_4$  einfachsten Netzgeräten mit gut isolierten Sekundärwicklungen und Trockengleichrichtern entnehmen. Die Röhren können sogar mit Wechselstrom geheizt werden. Nur muß eine elektrische Mitte der Heizwicklungen mit Klemme  $D$  verbunden werden. Zur Ausregelung der Veränderung von  $U_{01}$  und  $U_{02}$  (s. Gl. (17)) für die Röhren 1 und 2 bei Heizspannungsänderungen wird dann eine mit den Spannungsschwankungen variierende Spannung durch Gleichrichtung erzeugt. Die mittlere Gleich-

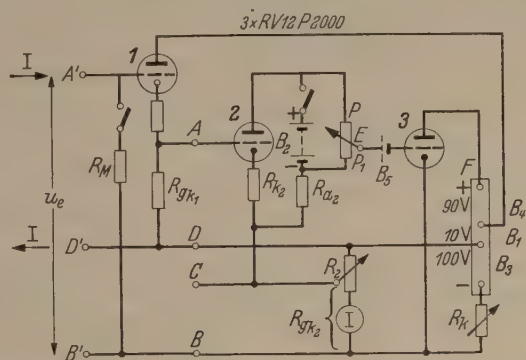


Abb. 10. Verstärker für Batteriebetrieb nach Abb. 9.  $S_2$  besteht hier aus einem Zweiröhrenverstärker. Die nicht eingezeichnete Heizung wird von einem Akkumulator mit 75 Ah gespeist. Dieser ist mit  $D$  verbunden.

spannung wird mit einer Batterie kompensiert, die resultierende Spannung wird in die Zuleitung der Röhre 3 eingeschaltet. Sie ist unbelastet, so daß man ihre Zeitkonstante der Verzögerung der Heizung anpassen kann. Damit gelingt störungsfreier Netzbetrieb mit ruhigem Nullpunkt ohne Stabilisierung des Netzteils. Eine eingehende Beschreibung eines solchen netzbetriebenen und selbstregelnden Gerätes wird a. a. O. gegeben.

Die Anodenspannung der Vorröhre kann ein Teil von  $B_4$  sein, weil  $B_4$  die Potentialschwankungen der Klemme  $D$  schon mitmacht und diese ja dieselben Potentialschwankungen wie die Klemme  $A'$  aufweist. Durch Regelung von  $B_1$  und  $R_{gK1}$  kann wieder erreicht werden, daß sich bei freiem Gitter der Röhre 1 derselbe Strom  $I$  im Instrument einstellt wie bei kurzgeschlossenen Klemmen  $A'$  und  $B'$ . Nur dauert diese Einstellung bei offenem Gitter jetzt wegen des hohen Eingangswiderstandes sehr lange.

Bei Spannungsmessungen wird die Spannung zwischen  $A'$  und  $B$  angeschaltet. Der Meßbereich kann durch Vergrößern von  $R_{gK3}$  bis auf  $\pm 20$  Volt erweitert werden. Für größere Meßbereiche muß  $B_3 + B_4$  vergrößert werden.

Mit den Röhren 2 und 3 allein ohne die Schleppröhre 1 erreicht man zwischen den Klemmen  $A$  und  $B$  einen Eingangswiderstand von  $2 \cdot 10^{10} \Omega$ .

Die Erweiterung auf dreistufige Ausführung des Verstärkers  $S_2$  soll hier der Kürze halber nur an einer

Batterieausführung gezeigt werden, deren Schema Abb. 11 wiedergibt. Weitere Zwischenverstärkungen sind in Gleichstromausführung kaum ratsam.

Die Spannung zwischen  $A$  und  $C$ , welche in Abb. 8 unmittelbar die Endröhre steuert, wird hier noch durch die beiden Röhren 3 und 4 etwa 33mal verstärkt und gleichsinnig auf das Gitter der Röhre 4 gebracht. Durch die Verwendung der Raumlade-gitterröhren wird die Gleichstromkopplung von Anode zu Gitter besonders einfach. Die Spannung von  $R_{gK}$  wirkt hier (im Gegensatz zu Abb. 10) der Steuerung der Röhre 4 durch die Röhre 3 nicht entgegen, woraus ebenfalls eine größere Gesamtsteilheit  $S_2$  ( $\sim 0,1$  A/V) resultiert.

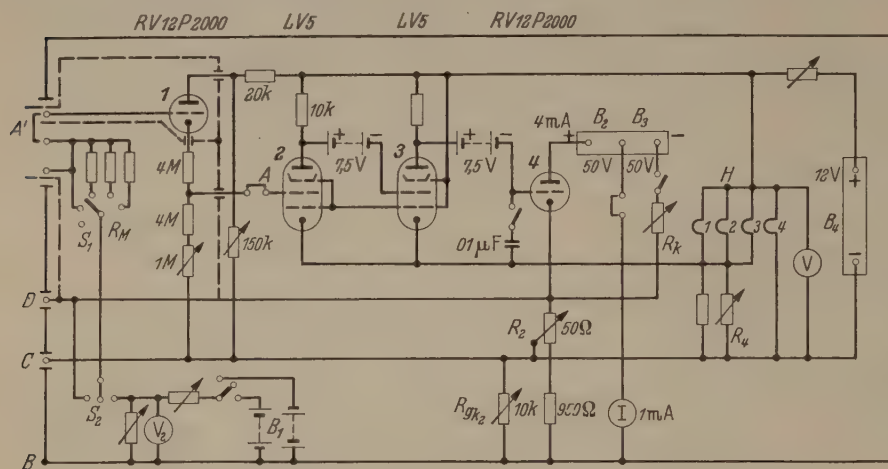


Abb. 11. Verstärker für Batteriebetrieb nach Abb. 9, bei welchem  $S_2$  dreistufig aufgebaut ist. Die Röhrenheizungen sind rechts unter  $H$  gezeichnet. Die langsamen Änderungen der Batteriespannungen sind ohne Einfluß auf den Nullpunkt.

Der Übertragungsverlustfaktor  $\bar{u}$  ist im vorliegenden Fall nahezu 1%. Der Widerstand  $R_2$  ist nicht in die Gegenkopplung einbezogen. Er entspricht dem Widerstand  $R_K$  in Abb. 3. Sein Wert liegt nahe bei  $10 \Omega$  für  $R_{gK} \approx 1000 \Omega$ . Die Batterie  $B_4$  macht die Potentialschwankungen des Verstärkereingangs mit und muß isoliert eingebaut werden. Wir verwenden zwei Motorradakkumulatoren. Die Spannung kann mit  $R_K$  reguliert werden. Außerdem erzeugt der Heizstrom der Röhren an  $R_4$  eine Spannung, welche von der Spannung  $U_{AB}$  subtrahiert wird und so, ähnlich wie es bei Abb. 8 beschrieben wurde, den Nullpunkt von den Änderungen der Heizspannung bei der Entladung von  $B_4$  unabhängig macht.

Die Kompensation des Anodenruhestromes (4 mA) der Röhre 4 geschieht durch  $B_3$  über  $R_K$ . Die Schaltung ist auf Änderungen der Spannungen von  $B_2$  und  $B_3$  äußerst unempfindlich, weil die Gegenkopplung sofort die Röhre 4 wirksam nachsteuert. Deshalb kann  $R_K$  größer als der innere Widerstand der Röhre 4 sein und mit kleinerer Batteriespannung gearbeitet werden.

Die Anodenspannung der Röhre 1 wurde der Batterie  $B_4$  entnommen, obwohl diese nicht mit der Klemme  $D$  sondern mit der Klemme  $C$  verbunden ist. Bei dem kleinen Übertragungsverlust der Schaltung ist dies gegenüber der Verwendung einer gesonderten Trockenbatterie gerechtfertigt. Der veränderliche Widerstand von  $150 \text{ k}\Omega$  dient der Einregelung der Anodenspannung, damit Gitterstromfreiheit bei  $U_{A'B} = 0$  erzielt werden kann.

Schließlich kann noch aus der Batterie  $B_2$  ein Voltmeter  $V_2$  eine einstellbare Eichspannung entnommen werden und über  $S_1$  und  $S_2$  direkt auf den Eingang geschaltet werden. Wird sie mit  $S_1$  über einen hohen Wert von  $R_M$  zugeführt, so können damit jederzeit schnell der Eingangswiderstand und die Lage des gitterstromfreien Arbeitspunktes kontrolliert werden. Man zeichnet sich rasch die beiden Eichkurven auf. Ihr Schnittpunkt muß bei der Eingangsspannung 0 liegen. Schaltet man zwischen  $A'$  u.  $C$  einen Widerstand von  $10^9 \Omega$ , so bekommt man einen Eingangswiderstand von etwa  $5 \cdot 10^{10} \Omega$ , der sehr konstant ist. Eine Stromänderung von  $10^{-14}$  A auf den Eingang ist dann am Instrument

mit  $0,5 \mu\text{A}$  eben noch erkennbar. Bei freiem Gitter der Röhre 1 geben  $10^{-17}$  A noch einen merklichen Ausschlag.

Sollen mit dem Verstärker nur verlustlose Spannungsmessungen vorgenommen werden bei welchen Eingangswiderstände bis zu  $10^{10} \Omega$  heranzulässig sind, so kann man auf die Röhre 1 verzichten und die Spannung zwischen  $A$  und  $C$  anschalten. Zur Kompensation des Gitterstromes werden  $10^9 \Omega$  zwischen  $A$  und  $D$  geschaltet und  $R_2$  so weit vergrößert, daß die Anzeige nach Abschaltung der Eingangsspannung stehen bleibt. Der resultierende Eingangswiderstand kann wie

oben angegeben durch die Aufnahme von Eichkurven kontrolliert werden.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die Röhre 1 elektrisch gut abgeschirmt und insbesondere vor Licht geschützt werden muß, wenn man ein offenes Gitter arbeiten will. Man kann durch eine konstante Beleuchtung der Röhre 1 den Gitterstrom im Maximum des „verkehrten“ Gitterstromes kompensieren. Dadurch wird wieder erreicht, daß der Verstärker trotz seiner hohen Ladungsempfindlichkeit bei freiem Gitter bei jeder Eingangsspannung des Meßbereichs nach Abschaltung derselben stehen bleibt (natürlich abgesehen von eventuellen Kontaktschwankungen, welche beim Vorgang des Abschaltens eine gewisse Veränderung ergeben).

Die Eingangskapazität wurde zu  $0,03 \text{ pF}$  ermittelt. Da eine Spannungsänderung am Eingang von 5 mV noch sicher erkennbar ist, können also 1000 Elektronen noch abgelesen werden. Die Schwankungen des Gitterstroms der Röhre 1 verursachen bei offenem Gitter maximale Ausschläge von 8 mV Volt.

Eine Zunahme der Heizspannung wirkt über die Heizspannung wie eine Vergrößerung der (positiven) Eingangsspannung und in gleichem Sinn über die Raumlade- und Schirmgitter der Röhre 2. Das kann jedoch mit dem erhöhten Spannungsabfall am Widerstand  $R_4$  ausgeglichen werden, welcher auf die Röhren 2, 3 und 4 einwirkt.

Es sei noch bemerkt, daß der Verstärker nach Abb. 11 nicht nur für Gleichstrom, sondern auch im ganzen Tonfrequenzbereich gleichmäßig arbeitet.

Natürlich muß ein so hoch empfindlicher Verstärker mit sorgfältiger Abstimmung der einzelnen Röhren unter sich und gegen den Eingang aufgebaut werden, auch bei Gleichstromverstärkung, da sonst durch Rückinduktion ein langsames Weglaufen des Nullpunktes eintreten kann.

Ein kritischer Punkt dieser Verstärker mit Batteriegeheizten Röhren ist die Isolation zwischen der Kathodenschicht und der Heizspirale bei der Schleppröhre 1 (Abb. 10 und Abb. 11, bzw. der Röhre 1 in Abb. 8). Er soll mindestens 10 M $\Omega$  betragen, da sonst die Röhre wieder einen großen Anodenstrom erhält und damit der Gitterstrom ansteigt. Bei Änderungen dieses Isolationswiderstandes können 0-Punktsschwankungen eintreten. Dies und auch die Gasresteigenschaften der Röhren machen eine Auswahl der Schleppröhren erforderlich, die am besten durch Prüfung nach mehrtägigem Einrennen erfolgt. Oft ist dabei die Polung des Heizschlusses von Bedeutung. Etwa 50% erwiesen sich bei uns als brauchbar.

Besondere Heizung mit einem weiteren isoliert aufgestellten Akkumulator hilft immer, doch wird an diesen Aufwand meist zu vermeiden suchen. Bei den an anderer Stelle zu beschreibenden Ausführungen mit Vollnetzbetrieb entfällt diese Schwierigkeit. Leider sind aber diese Geräte durch die Kompensation der Netzspannungsschwankungen

nicht mehr so einfach. Es lag uns aber gerade daran, diese im Aufbau sehr einfachen und billigen Verstärker bekannt zu machen, deren Justierung natürlich fachmännisches Verständnis voraussetzt, wenn die gegebenen Möglichkeiten ausgeschöpft werden sollen.

### Zusammenfassung.

Zunächst wird die Verbesserung der Eingangseigenschaften von Verstärkern durch Gegenkopplungsmaßnahmen kurz erläutert und daran anschließend ein Verfahren zur automatischen Kompensation des Eingangswiderstandes von Stromverstärkern bzw. des Eingangsleitwertes bei Spannungsverstärkern angegeben. Es werden mehrere erprobte Schaltungen für Röhrenelektrometer angegeben, welche mit technischen Röhren extrem hohe Eingangswiderstände bei kleiner Kapazität erzielen.

**Literatur.** [1] TÖNNIES, I. F.: Z. Elektrotechnik **63**, 153 (1942). — [2] GEIGER, W.: ATM Juni 1948; Februar 1949; Februar, März, Mai 1950; Z 631; Z 634; I 8335. — [3] HERBERT, R. I.: Brit. J. Radiol. **21**, 420 (1948). — [4] SINCLAIR, K. W. u. S. P. NEWBERG: J. sci. Instruments **28**, 234 (1951). — [5] EHMERT, A. u. R. MÜHLEISEN: Z. angew. Physik **5**, 43 (1953). — [6] BARTH, G.: Z. f. Physik **87**, 399 (1934).

Dr. ALFRED EHMERT,

Forschungsstelle für Physik der Stratosphäre,  
Weißenau Krs. Ravensburg.

## Eine einfache Methode zur gleichzeitigen Bestimmung der spez. Wärme, der inneren Reibung und des Wärmeleitvermögens von Gasen.

Von HERMANN SENFTLEBEN, Recklinghausen.

Mit 7 Textabbildungen.

(Eingegangen am 12. August 1952.)

Das Bedürfnis nach zuverlässigen Werten der in der Überschrift genannten Größen ( $c_p$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$ ) macht sich in Wissenschaft und Technik in steigendem Maße bemerkbar, weil das in Tabellenwerken vorliegende Material unzureichend ist. Die bisher bekannten Meßmethoden sind z. T. umständlich und schwer durchführbar. Im folgenden wird eine sehr einfach durchzuführende Methode, die alle drei Größen gleichzeitig liefert, beschrieben. Zunächst werden die theoretischen Grundlagen, die auf früheren Arbeiten [1], [2] des Verfassers aufbauen, gegeben und dann die einfache Versuchsanordnung und Durchführung beschrieben.

### Theoretische Grundlage der Methode.

Der eigentliche Ausgangspunkt der hier zugrunde gelegten Überlegungen ist die berühmte Untersuchung NUSSELT'S [3] über die Wärmeabgabe fester Körper in Flüssigkeiten und Gasen. Durch konsequente Anwendung und Durchführung von Ähnlichkeitsbetrachtungen gelangte NUSSELT zu einer Beziehung, die ganz allgemein für einander ähnliche in einem Gas oder einer Flüssigkeit befindliche feste Körper gilt, soweit dieselben durch eine Längengröße  $l$  charakterisiert werden können, z. B. Radius einer Kugel, Durchmesser eines horizontalen Zylinders. Nach NUSSELT ist die je Zeiteinheit und Flächeneinheit von dem Körper bei freier Strömung ab-

geführte Wärmemenge  $q$  folgendermaßen darstellbar:

$$q = \frac{Q}{F} = \frac{\lambda}{l} \Theta f \left[ \frac{l^3 \varrho^2 g \delta \Theta}{\eta^2}, \frac{c_p \eta}{\lambda} \right]. \quad (1)$$

Dabei ist  $g$  die Fallbeschleunigung,  $\delta$  der Ausdehnungskoeffizient des Mediums (bei Gasen mit genügender Genauigkeit  $1/T$ ),  $Q$  die je Zeiteinheit von der erhitzten Oberfläche  $F$  abgegebene Wärmemenge,  $\lambda$  das Wärmeleitvermögen,  $\eta$  die innere Reibung,  $c_p$  die spez. Wärme des Mediums.  $\Theta = T_r - T_0$  ist die Temperaturdifferenz zwischen dem erhitzten Körper ( $T_r$ ) und der Umgebung ( $T_0$ ). Die beträchtliche Zahl von Größen, die auf die Wärmeübertragung Einfluß haben, ist hier auf wenige „Kenngrößen“ reduziert. Dadurch ist es möglich, mit der Lösung eines speziellen Problems gleichzeitig eine ganze Problemgruppe (d. h. mit gleichen Werten der „Kenngrößen“) zu klären. Es ist üblich geworden, folgende Kenngrößen einzuführen:

$$Nu \text{ (NUSSELT)} = \frac{Q l}{\lambda F \Theta} \quad (2a)$$

$$Gr \text{ (GRASHOF)} = \frac{l^3 \varrho^2 g \delta \Theta}{\eta^2} \quad (2b)$$

$$Pr \text{ (PRANDTL)} = \frac{c_p \eta}{\lambda}. \quad (2c)$$

Hiermit nimmt Gleichung (1) folgende Form an:

$$Nu = f(Gr, Pr). \quad (1a)$$

Für den Fall, daß die auftretenden Geschwindigkeiten nicht groß sind (was bei freier Strömung in Gasen meist der Fall ist), kann man bei der Ableitung der Gleichungen die Trägheitskräfte vernachlässigen, und Gl. (1a) geht über in:

$$Nu = f(Gr \cdot Pr) \quad (1b)$$

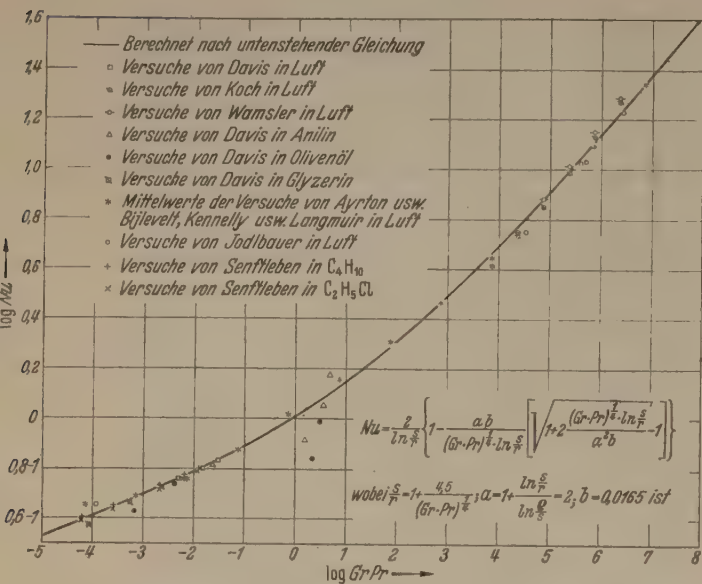


Abb. 1. Gemessene und berechnete Werte von  $Nu$  als Funktion von  $Gr \cdot Pr$  für alle in Frage kommenden Werte von  $Gr \cdot Pr$  (horizontaler Zylinder).

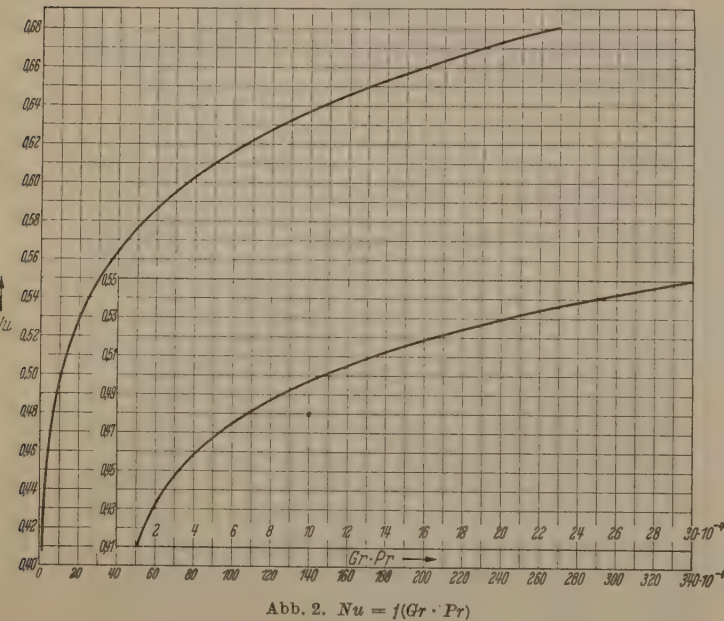


Abb. 2.  $Nu = f(Gr \cdot Pr)$

$$Nu = \frac{2}{\ln \frac{s}{r}} \left\{ 1 - \frac{0,033}{\ln \frac{s}{r} (Gr \cdot Pr)^{1/4}} \left[ \sqrt{1 + \frac{\ln \frac{s}{r} (Gr \cdot Pr)^{1/4}}{0,033}} - 1 \right] \right\}$$

$$\frac{s}{r} = 1 + \frac{4,5}{(Gr \cdot Pr)^{1/4}}$$

Dem Verfasser ist es in der oben zitierten Arbeit gelungen, für einige Fälle (horizontaler Zylinder, vertikaler Zylinder, senkrechte Platte) die Form der Funktion abzuleiten, die für alle in Frage kommenden Werte der Variablen (über zehn Zehnerpotenzen derselben) mit den Messungen im Einklang steht. Für den horizontalen Zylinder, der im folgenden

allein in Frage kommt, gilt die Gleichung:<sup>1</sup>

$$Nu = f(Gr \cdot Pr) = \frac{2}{\ln \frac{s}{r}} \left[ 1 - \frac{0,033}{\ln \frac{s}{r} (Gr \cdot Pr)^{1/4}} \left( \sqrt{1 + \frac{\ln \frac{s}{r} (Gr \cdot Pr)^{1/4}}{0,033}} - 1 \right) \right] \quad (3)$$

Hierbei ist:

$$\frac{s}{r} = 1 + \frac{4,5}{(Gr \cdot Pr)^{1/4}} \quad (3a)$$

Aus diesen Gleichungen ist es möglich,  $Nu$  als Funktion von  $Gr \cdot Pr$  zu berechnen; man erhält Kurven wie sie in Abb. 1 (in logarithmischem Maßstab) und Abb. 2 (in normalem Maßstab für den bei Messungen an Gasen in Frage kommenden Bereich von  $Gr \cdot Pr$ ) wiedergegeben sind. Tabelle 1 enthält die in Frage kommenden Werte von  $Nu$  und  $Gr \cdot Pr$ .

Tabelle 1. Werte von  $Nu$  und  $Gr \cdot Pr$  berechnet nach Gl. (3).

|               |        |       |        |        |        |                        |                        |                       |
|---------------|--------|-------|--------|--------|--------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| $Gr \cdot Pr$ | 1      | 2     | 3      | 4      | 5      | 6                      | 7                      | 8 · 10 <sup>-4</sup>  |
| $Nu$          | 0,408  | 0,432 | 0,4473 | 0,4582 | 0,467  | 0,475                  | 0,4813                 | 0,486                 |
| $Gr \cdot Pr$ | 9      | 10    | 15     | 20     | 25     | 30                     | 40                     | 50 · 10 <sup>-4</sup> |
| $Nu$          | 0,4925 | 0,497 | 0,5154 | 0,5294 | 0,5394 | 0,5497                 | 0,564                  | 0,576                 |
| $Gr \cdot Pr$ | 70     | 90    | 110    | 130    | 150    | 180                    | 210 · 10 <sup>-4</sup> |                       |
| $Nu$          | 0,5955 | 0,610 | 0,6223 | 0,6328 | 0,6415 | 0,653                  | 0,664                  |                       |
| $Gr \cdot Pr$ | 240    | 270   | 300    | 330    | 360    | 380 · 10 <sup>-4</sup> |                        |                       |
| $Nu$          | 0,6733 | 0,681 | 0,6894 | 0,6961 | 0,7025 | 0,7064                 |                        |                       |

Von diesen früher gefundenen Ergebnissen ausgehend, gelangt man zu einer Möglichkeit, die Konstanten  $c_p$  und  $\eta$  zu ermitteln.

Was zunächst die Kennzahl  $Pr$  betrifft, so ist sie für Gase theoretisch berechenbar und soll bei konstanter Temperatur nur von der Zahl der Atome im Molekül abhängig sein. Das Experiment bestätigt das innerhalb gewisser Grenzen. Wir setzen hier, um nicht auf bestimmte Molekulararten festgelegt zu werden, allgemein

$$Pr = a Pr_0 \quad (4)$$

wobei  $Pr_0$  der Wert von  $\frac{c_p \cdot \eta}{\lambda}$  für ein bekanntes Vergleichsgas (0) ist. Die Werte von  $Pr$  schwanken bei Gasen erfahrungsgemäß zwischen 0,7 und 0,9.

Wir bilden nun für ein beliebiges Gas, dessen Konstanten wir bestimmen wollen, und ein Vergleichsgas (0) bei willkürlichen Temperatur- und Druckverhältnissen aber bei gleichen geometrischen Bedingungen den Quotienten:

$$\frac{Gr \cdot Pr}{Gr_0 \cdot Pr_0} = A \quad (5)$$

und erhalten bei Benutzung von (4) die Beziehung

$$\frac{Gr_0}{Gr} \cdot A = a \quad (6)$$

Um diese Gleichung verwenden zu können, muß  $a$  experimentell ermittelt werden. Dies geschieht auf folgende Weise:

Man mißt<sup>2</sup> die von einem erwärmten horizontalen Zylinder (Durchmesser  $l = 2r$ , Länge  $L$ , z. B. einer

<sup>1</sup> In der angeführten Arbeit [2] ist es Gl. (11) bzw. Abb. 1.

<sup>2</sup> Vgl. die Beschreibung der Versuchsanordnung S. 35.

elektrisch um die Temperaturdifferenz  $\Theta$  über die Umgebung geheizten Draht) an ein umgebendes Gas, dessen Wärmeleitfähigkeit den Wert  $\lambda$  hat, abgegebene Wärmemenge  $Q$ . Mit diesem Wert und den anderen erwähnten Größen bildet man nach Gl. (2a) den Wert von  $Nu$ . Diesem ist nach Gl. (3) ein Wert von  $Gr \cdot Pr$  zugeordnet, den man ohne weiteres aus Tabelle 1 oder Abb. 2 entnehmen kann. Dieser  $Gr \cdot Pr$ -Wert sei  $\alpha$ . Ganz dieselbe Messung und Rechnung macht man bei gleichen geometrischen und Temperaturverhältnissen für das Vergleichsgas (0) und erhält analog  $Gr_0 \cdot Pr_0 = \beta$ . Bildet man den Quotienten aus diesen experimentell ermittelten  $Gr \cdot Pr$ -Werten, so erhält man:

$$\left( \frac{Gr \cdot Pr}{Gr_0 \cdot Pr_0} \right)_{\text{gem.}} = \frac{\alpha}{\beta} = A_m. \quad (7)$$

Dieser so aus Messungen bestimmte Wert von  $A_m$  ist im allgemeinen nicht mit dem durch (5) rein rechnerisch bestimmten Quotienten  $A$  identisch, auch wenn er letztere auf die gleichen geometrischen, Druck- und Temperaturverhältnisse bezogen wird<sup>1</sup>. Es gilt vielmehr:

$$A_m = a \cdot A.$$

Dies in (6) eingesetzt ergibt:

$$\frac{Gr_0}{Gr} \frac{A_m}{a} = a \quad \text{oder} \quad \frac{Gr_0}{Gr} = \frac{a^2}{A_m}. \quad (6a)$$

Durch Benutzung der Definitionsgleichung (2b) für  $Pr$  wird hieraus:

$$\frac{\rho_0^2 \eta^2}{\rho^2 \eta_0^2} = \frac{a^2}{A_m} = \frac{p_0^2 \mu_0^2 \eta^2}{p^2 \mu^2 \eta_0^2},$$

wenn man die Dichte  $\rho$  nach dem Gasgesetz durch Molekulargewicht  $\mu$ , Druck  $p$  und Temperatur  $T$  ersetzt  $\left( p = \frac{\rho R T}{\mu} \right)$ .

Hieraus folgt sofort:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{a \mu p}{\mu_0 p_0} \sqrt{\frac{1}{A_m}}. \quad (8)$$

Aus (4) und der Definitionsgleichung (2c) für  $Pr$  ergibt sich:

$$\frac{c_p}{c_{p0}} = \frac{\eta_0 \lambda}{\eta \lambda_0} a \quad (4a)$$

und mit Benutzung von (8) und der Einführung der Molekularwärme  $C_p = \mu c_p$  wird:

$$C_p = C_{p0} \frac{\lambda p_0}{\lambda_0 p} \sqrt{A_m}, \quad (9)$$

d. h. die Bestimmung von  $C_p$  (bzw.  $c_p$ ) erfordert nicht das Kenntnis der Konstante  $a$  sondern ist allein durch

<sup>1</sup> Der Unterschied von  $A$  und  $A_m$  ist dadurch bedingt, daß auch bei gleichen Außentemperaturen  $T$  bzw.  $\Theta$  die mittleren Strömungstemperaturen (welche den Wert von  $\lambda$  bestimmen) verschieden sind, wenn  $Pr$  ungleich  $Pr_0$  ist. Um  $Nu$  zu bestimmen, muß  $\lambda$  bekannt sein; dies ergibt sich bei der weiter unten zu beschreibenden Methode stets für beide Gase bei gleicher Temperatur. Es können also bei der Bestimmung von  $Nu$  und daraus von  $A_m$  für beide Gase nur  $\lambda$ -Werte gleicher Temperatur eingesetzt werden; da aber nach dem eben Gesagten in Wirklichkeit die Strömungstemperaturen etwas verschieden sind, bedingt dies den Unterschied zwischen  $A$  und  $A_m$ . Durch genauere Diskussion der Strömungstemperaturen läßt sich zeigen, daß  $A_m > A$  sein muß; da für  $Pr = Pr_0$ , d. h.  $a = 1$ ,  $A_m = A$  werden muß, ist der einfachste und stets ausreichende Ansatz der, daß  $A_m = a \cdot A$  ist.

die Messung von  $A_m$ , d. h. nach (7) und den vorangegangenen Überlegungen durch Messung von  $Q$  bzw.  $Q_0$  möglich. Der Wert von  $\eta$  folgt aus Gl. (8); für ihn muß  $a$  bekannt sein. Betreffs der Bestimmung  $a$  vgl. weiter unten Seite 37.

Damit ist gezeigt, daß die spez. Wärme und die innere Reibung aus den Gl. (8) und (9) ermittelt werden können. Die Bestimmung des Wärmeleitvermögens  $\lambda$  bedarf weiter keiner besonderer theoretischer Überlegungen, sondern erfolgt direkt aus den Meßresultaten; im folgenden Abschnitt wird es näher auseinandergesetzt werden.

### Die experimentelle Durchführung der Methode.

Die Ausführung der erforderlichen Messungen ist denkbar einfach<sup>1</sup>. In einem horizontalen Zylinder  $Z$  von ca. 2,0 cm Durchmesser, der durch eine einfache

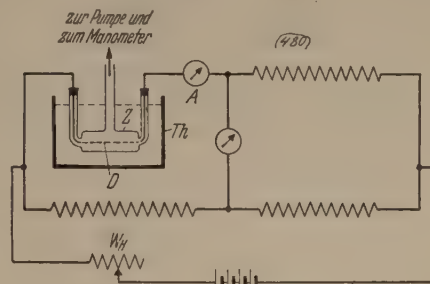


Abb. 3. Schema der Versuchsanordnung.

Vakuumanlage ausgepumpt und mit Gasen beliebigen Druckes gefüllt werden kann, ist ein ca. 0,005 cm dicker Draht  $D$  aus Platin oder einem anderen von den Gasen nicht angreifbaren Material ausgespannt. Zusammen mit einem genügend empfindlichen Strommesser  $A$  liegt er in einem Zweig einer WHEATSTONESchen Brückenordnung (vgl. Abb. 3). Der Meßstrom dient auch als Heizstrom und wird durch den Widerstand  $W_H$  reguliert; er ist so bemessen, daß der Draht ca. 20 bis 30 Grad über die Umgebungstemperatur erwärmt wird. Durch einen Thermostaten wird die Wandtemperatur des Gefäßes konstant gehalten<sup>2</sup>. Gemessen wird bei verschiedenen Drucken des Gases die Stromstärke  $i$ , die notwendig ist, um einen bestimmten Widerstand  $w$ , d. h. eine bestimmte Temperatur (ca 20 bis 30 Grad über der Außentemperatur) aufrecht zu erhalten. Aus dieser Stromstärke  $i$  und dem Drahtwiderstand  $w$  folgt<sup>3</sup>  $Q = i^2 w$ .

Trägt man die so erhaltenen Werte von  $Q$  als Funktion des Gasdruckes  $p$  auf, so erhält man eine Kurve von der Art, wie sie in Abb. 4 schematisch dargestellt ist.

Die Kurven haben stets denselben Typus, wenn auch, je nach dem Molekulargewicht des Gases, welches ja weitgehend die Stärke der Strömung bestimmt, die charakteristischen Eigenschaften verschieden hervor-

<sup>1</sup> Betr. genauerer Einzelheiten vgl. [4].

<sup>2</sup> Durch Variation der Temperatur dieses Thermostaten sind Messungen bei verschiedenen Temperaturen möglich.

<sup>3</sup> Eine Korrektur dieses Wertes für die an den Enden abgeleitete sowie durch Strahlung abgegebene Energie läßt sich leicht dadurch anbringen, daß man die Stromstärke  $i_0$  im hohen Vakuum mißt, die zur Aufrechterhaltung der Temperaturdifferenz  $\Theta$  nötig ist; den entsprechenden Wert von  $i_0 w$  bringt man dann in Abzug. Im allgemeinen ist diese Korrektur sehr klein.

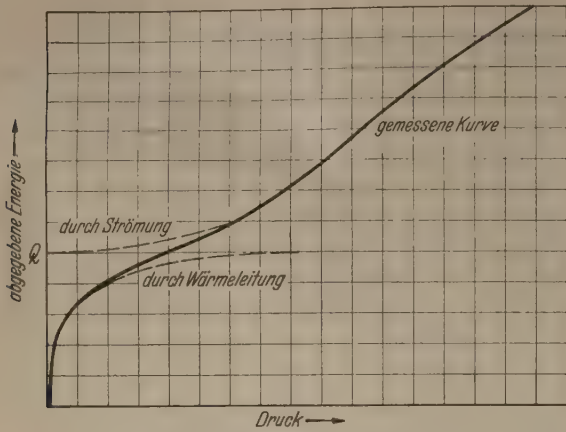


Abb. 4. Schematischer Kurvenverlauf.

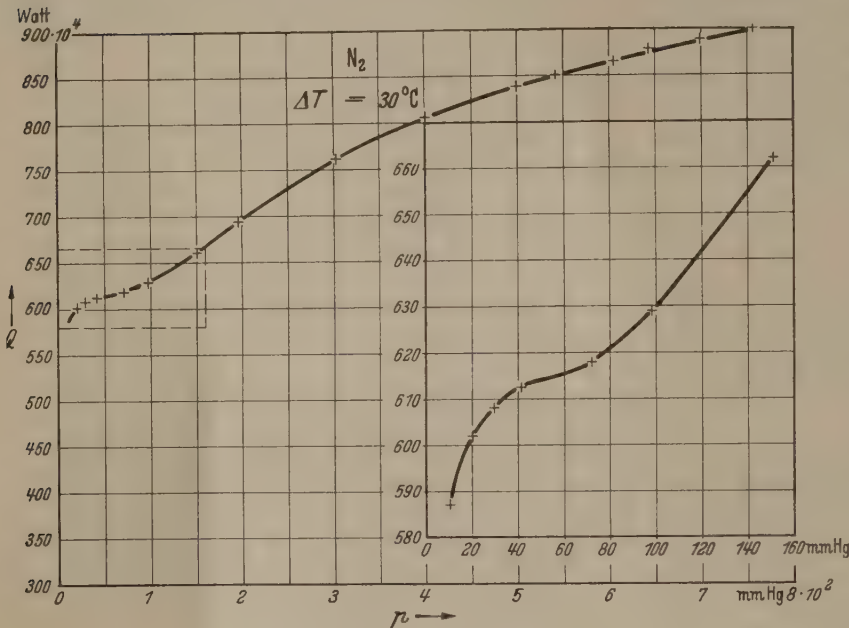


Abb. 5. Wärmeabgabe in  $N_2$  in Abhängigkeit vom Druck.

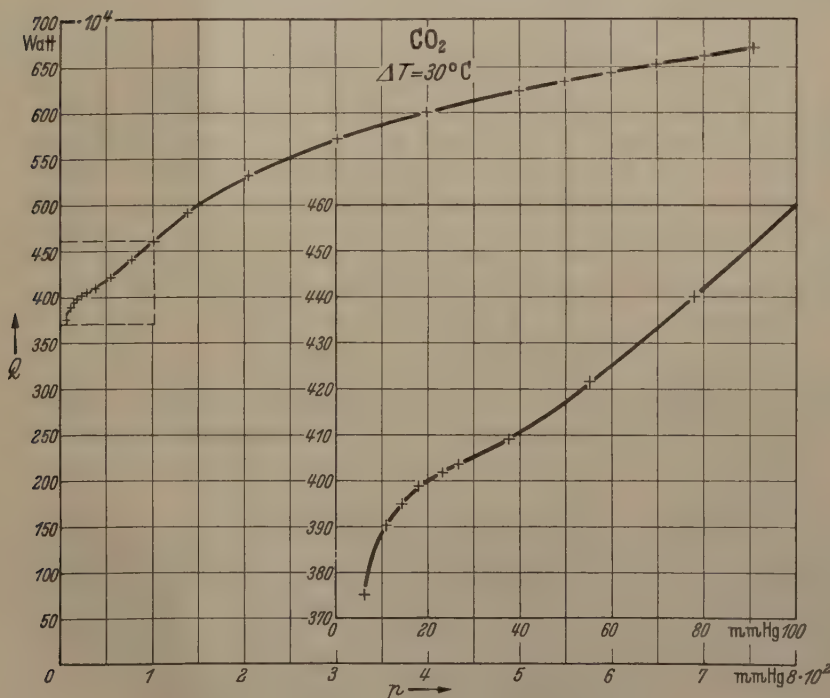


Abb. 6. Wärmeabgabe in  $CO_2$  in Abhängigkeit vom Druck.

treten. Die Kurven zeigen zunächst einen steilen Anstieg bei sehr kleinen Drucken; er ist auf den hier hervortretenden und mit steigendem Druck schnell abnehmenden „Temperatursprung“ an der Drahtoberfläche zurückzuführen [5]. Würde keine Strömung vorhanden sein, so würden die Kurven nach diesem Anstieg horizontal verlaufen, da ja das Wärmeleitvermögen vom Druck unabhängig ist. Durch das Einsetzen der Strömung steigt aber die Energieabgabe des Drahtes mit steigendem Druck weiter, erst stark, bei höheren Drucken schwächer. Bei leichten Gasen, wie z. B.  $N_2$ , sind diese drei Abschnitte (Temperatursprung, Wärmeleitung, Strömung) in der Kurve deutlich erkennbar, weil die Strömung erst relativ spät, d. h. bei nicht zu kleinen Drucken, einsetzt. Bei schweren Gasen beginnt die Strömung

bereits bei niedrigen Drucken und verhindert ein Horizontalwerden der Kurve, die nur einen Wendepunkt aufweist. Dieser liegt gerade bei dem Wert  $Q$  der abgegebenen Energie, der reiner Wärmeleitung, d. h. Horizontalwerden der Kurve, wenn keine Strömung vorhanden wäre, entspricht. Die Kurve würde, wenn der Temperatursprung nicht vorhanden wäre, von dem Energiewerte  $Q$  nach oben ausgehen. Er ist demnach allein durch das Wärmeleitvermögen des Gases bestimmt und diesem proportional. Bestimmt man die Energie an diesem Wendepunkt  $Q$  bzw.  $Q_0$  bei zwei Gasen, so folgt

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \quad (10)$$

Aus dieser Gleichung läßt sich also das Wärmeleitvermögen eines Gases ohne weiteres ermitteln, wenn es in einem Vergleichsgas bekannt ist.

Die Ausführung der Bestimmung der drei Größen  $C_p$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$  geht also in folgender Weise vor sich:

1. Man mißt in der oben angegebenen Weise die vom Draht abgegebene Energie  $Q$  als Funktion des Druckes  $p$  und erhält eine Kurve von der Art, wie sie in Abb. 5 und 6 dargestellt ist.

Man liest aus der Kurve am Wendepunkt den Energiewert  $Q$  ab.

2. Man wiederholt die Messung mit einem Vergleichsgas, dessen Konstanten bekannt sind<sup>1</sup> und liest auch hier am Wendepunkt der Energiewert  $Q_0$  ab.

3. Nach Gl. (10) ist der gesuchte Wert des Wärmeleitver-

<sup>1</sup> Dafür eignet sich z. B.  $O_2$  oder  $CO_2$  bei denen die in Frage kommenden Werte mit genügender Genauigkeit aus Tabellen entnommen werden können. Auch Äthylchlorid  $C_2H_5Cl$  ist geeignet, ebenso wie, besonders bei schweren Gasen, Äthylchlorid ( $C_2H_5Cl$ ).

ens

$$\lambda = \lambda_0 \frac{Q}{Q_0} \tag{10a}$$

ler folgenden Tabelle 2 sind Werte des Wärmeermögens zusammengestellt, die auf diese Weise itelt wurden. Als Vergleichsgas wurde Äthan utzt.

lle 2. Gemessene und Tabellen entnommene Werte des meileitvermögens von Gasen, für eine Temperatur von 30° (cal·sec<sup>-1</sup>·cm<sup>-1</sup>·grad<sup>-1</sup>).

| Gas        |                                  | $\lambda \cdot 10^4$ (gem.) | $\lambda \cdot 10^4$ (Tab.) |
|------------|----------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| astoff     | N <sub>2</sub>                   | 0,606                       | 0,63                        |
| erstoff    | O <sub>2</sub>                   | 0,630                       | 0,64                        |
| lendioxyd  | CO <sub>2</sub>                  | 0,395                       | 0,40                        |
| ylen       | C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>    | 0,499                       | 0,472                       |
| an         | C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>    | 0,52                        | 0,52                        |
| pylen      | C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>    | 0,426                       | —                           |
| an         | C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>   | 0,400                       | 0,395                       |
| ylenoxyd   | C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> O  | 0,309                       | —                           |
| ylechlorid | CH <sub>3</sub> Cl               | 0,261                       | 0,268                       |
| ylchlorid  | C <sub>2</sub> H <sub>3</sub> Cl | 0,275                       | —                           |
| ylchlorid  | C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> Cl | 0,275                       | 0,28                        |
| lnitril    | C <sub>2</sub> H <sub>3</sub> CN | 0,239                       | —                           |
| loräthylen | C <sub>2</sub> HCl <sub>3</sub>  | 0,192                       | —                           |

Übereinstimmung der gefundenen Werte mit den annten, soweit solche vorliegen, ist durchaus bedigend. Dabei ist zu betonen, daß alle hier angenen Werte Mittelwerte von nur drei Meßreihen l. Durch mehrfache Wiederholungen ließe sich Genauigkeit steigern.

Nachdem also aus den unter 1. und 2. beschrienen Messungen der Wert von  $\lambda$  ermittelt ist, verrt man zur Bestimmung von  $C_P$  und  $\eta$  weiter endermaßen:

4. Man entnimmt bei einem beliebigen Druck  $p$  den Kurven den zugehörigen Wert der abgeführEnergie  $Q$  und bildet sodann nach (2a)

$$Nu = \frac{Q}{\pi L \lambda \Theta}$$

st die Länge des Drahtes,  $\Theta$  die Temperaturdifniz desselben gegenüber der Außentemperatur). der Beziehung  $Nu = f(Gr \cdot Pr)$  (vgl. Gl. 3) beamt man den Wert von  $Gr \cdot Pr$ , der zu dem ebenimmten  $Nu$ -Wert gehört. Dies geschieht grash. Mit ausreichender Genauigkeit liest man die inander gehörigen Werte aus Abb. 2 ab, die aufnd der Tabelle 1 gezeichnet ist. Diese Bestimmung  $Gr \cdot Pr$  führt man für das zu untersuchende Gas für das Vergleichsgas aus <sup>1</sup> und erhält  $Gr \cdot Pr = \alpha r_0 \cdot Pr_0 = \beta$ . Mit diesen beiden Werten  $\alpha$  und  $\beta$  l nach (7) der Wert  $A_m$  festgelegt:

$$A_m = \frac{\alpha}{\beta}.$$

5. Einsetzen desselben in Gl. (9) ergibt ohne weies den gesuchten Wert von  $C_p$ . Benutzt man ekmäßigerweise in beiden Gasen denselben Druck =  $p_0$ , so wird die Bestimmung noch einfacher.

$$C_p = C_{p0} \frac{\lambda}{\lambda_0} \sqrt{A_m}. \tag{9a}$$

Damit ist der Wert der Molekularwärme bestimmt. der folgenden Tabelle sind Werte, die auf diesem

Sehr zweckmäßig ist es, diese Bestimmung von  $Gr \cdot Pr$  Grund mehrerer  $Q$ -Werte, die zu verschiedenen Drucken ren, vorzunehmen. Vgl. Anm. 2 S. 38.

Wege ermittelt wurden mit solchen zusammenge stellt, die aus Tabellen zu entnehmen waren.

Tabelle 3. Gemessene und Tabellen entnommene Werte der Molekular- bzw. spez. Wärme von Gasen, für eine Temperatur von 30° geltend (cal·g<sup>-1</sup>·grad<sup>-1</sup>).

| Gas             |                                  | $c_p$ (gem.) | $c_p$ (Tab.) | $C_p$ (gem.) | $C_p$ (Tab.) |
|-----------------|----------------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Stickstoff      | N <sub>2</sub>                   | 0,246        | 0,248        | 6,87         | 6,95         |
| Sauerstoff      | O <sub>2</sub>                   | 0,221        | 0,220        | 7,09         | 7,03         |
| Kohlendioxyd    | CO <sub>2</sub>                  | 0,205        | 0,203        | 9,02         | 8,93         |
| Äthylen         | C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>    | 0,374        | —            | 10,46        | —            |
| Äthan           | C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>    | 0,422        | 0,422        | 12,65        | 12,65        |
| Propylen        | C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>    | 0,370        | —            | 15,52        | —            |
| Butan           | C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>   | 0,408        | 0,397        | 23,66        | 23,0         |
| Äthylenoxyd     | C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> O  | 0,274        | —            | 12,05        | —            |
| Methylchlorid   | CH <sub>3</sub> Cl               | 0,211        | 0,213        | 10,67        | 10,75        |
| Vinylchlorid    | C <sub>2</sub> H <sub>3</sub> Cl | 0,232        | —            | 14,5         | —            |
| Äthylchlorid    | C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> Cl | 0,238        | 0,239        | 15,32        | 15,4         |
| Acrylnitril     | C <sub>2</sub> H <sub>3</sub> CN | 0,313        | —            | 16,6         | —            |
| Trichloräthylen | C <sub>2</sub> HCl <sub>3</sub>  | 0,134        | —            | 19,2         | —            |

Auch hier ist Äthan als Vergleichsgas benutzt. Wie oben in Tabelle 2 die Werte des Wärmeleitvermögens, so sind auch hier die der spez. Wärme in bester Übereinstimmung mit den bekannten Werten. Wiederum sei darauf hingewiesen, daß es sich um Mittelwerte von nur drei Meßreihen handelt.

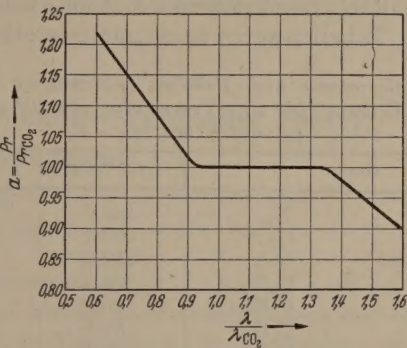


Abb. 7. Bestimmung der Korrekturgröße  $a$ .

6. Die Bestimmung der inneren Reibung geschieht mit dem nach 4. ermittelten Wert von  $A_m$  auf Grund der Gl. (8). Hier tritt aber die Schwierigkeit auf, daß der Wert von  $a$  (aus der Gleichung  $Pr = a \cdot Pr_0$ ) bekannt sein muß. Es hat sich als zweckmäßigstes Verfahren zur Bestimmung von  $a$  das Folgende ergeben: Für möglichst viele Gase, für die einigermaßen genaue Werte von  $c_p$ ,  $\eta$  und  $\lambda$  bekannt waren <sup>1</sup>, wurde  $a$  berechnet unter Zugrundelegung von CO<sub>2</sub> als Vergleichsgas, d. h. es wurde berechnet

$$a = \frac{Pr}{Pr_{CO_2}} = y = \left( \frac{c_p \cdot \eta}{\lambda} \right) : \left( \frac{c_p \cdot \eta}{\lambda} \right)_{CO_2}.$$

Für dieselben Gase wurde der Quotient  $x = \frac{\lambda}{\lambda_{CO_2}}$  berechnet und dann die Kurve  $y = f(x)$  gezeichnet. Durch die natürlich streuenden Werte wurde die wahrscheinlichste Kurve gelegt, die in Abb. 7 wiedergegeben ist <sup>2</sup>. Benutzt man bei den Messungen CO<sub>2</sub>

<sup>1</sup> Es wurden die Werte von 10 Gasen benutzt.  
<sup>2</sup> Die Form der Kurve in Abb. 7 ist folgendermaßen verständlich: Das Wärmeleitvermögen der Gase ist weitgehend durch ihr Molekulargewicht bestimmt, und zwar ist  $\lambda$  bei kleinem Molekulargewicht groß und umgekehrt. Für den Wert von  $Pr = \frac{c_p \cdot \eta}{\lambda}$  ist  $\lambda$  sehr maßgebend. Da nun  $\lambda$  im Nenner von  $Pr$  steht, steigt die Kurve mit kleiner werdenden

als Vergleichsgas, so ist der Wert der Abszisse  $x = \frac{\lambda}{\lambda_{\text{CO}_2}}$  aus Gl. (10a) sofort zu entnehmen. Der zu diesem Wert  $x$  gehörige Wert  $y$  ist aus Abb. 7 ablesbar und ergibt direkt den gesuchten Wert von  $a$ . Ist nicht  $\text{CO}_2$  Vergleichsgas, so kann man entweder für das andere Vergleichsgas die entsprechende Kurve zeichnen, was recht mühsam ist, oder man macht folgende Überlegungen: Die Kurve gibt ja

$Pr_{(\text{Gas } x)} : Pr_{(\text{CO}_2)}$  als Funktion von  $\lambda_{(\text{Gas } x)} : \lambda_{(\text{CO}_2)}$ . Hat man nicht  $\text{CO}_2$  sondern ein anderes Gas (Gas 0) als Vergleichsgas, so berücksichtigt man:

$$a = \frac{Pr(\text{Gas } x)}{Pr(\text{Gas } 0)} = \frac{\frac{Pr(\text{Gas } x)}{Pr(\text{CO}_2)}}{\frac{Pr(\text{Gas } 0)}{Pr(\text{CO}_2)}}$$

Für die rechte Seite dieser Gleichung sind Zähler und Nenner aus Abb. 7 zu entnehmen, da ja  $\frac{\lambda(\text{Gas } x)}{\lambda(\text{CO}_2)}$  sowie  $\frac{\lambda(\text{Gas } 0)}{\lambda(\text{CO}_2)}$  aus (10a) bzw. aus Tabellen entnommen werden können. So ist es also in jedem Falle sehr leicht, den Wert von  $a$  aus Abb. 7 zu bestimmen. Mit diesem Wert von  $a$  und dem oben unter 4. ermittelten Wert von  $A_m$  ergibt Gl. (8) ohne weiteres den Wert von  $\eta$ . In Tabelle 4 sind analog den Tabellen 2 und 3 die mit der beschriebenen Methode bestimmten Werte und Tabellenwerte zusammengestellt.

Tabelle 4. Gemessene und Tabellen entnommene Werte der inneren Reibung, für eine Temperatur von  $30^\circ$  geltend ( $\text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1}$ ).

| Gas             |                                 | $\eta \cdot 10^6$ (gem.) | $\eta \cdot 10^6$ (Tab.) |
|-----------------|---------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Stickstoff      | $\text{N}_2$                    | 182,6                    | 179,5                    |
| Sauerstoff      | $\text{O}_2$                    | 205,7                    | 207,5                    |
| Kohlendioxid    | $\text{CO}_2$                   | 152,0                    | 152,0                    |
| Äthylen         | $\text{C}_2\text{H}_4$          | 104,2                    | 103,8                    |
| Äthan           | $\text{C}_2\text{H}_6$          | 96,2                     | 95,0                     |
| Propylen        | $\text{C}_3\text{H}_6$          | 89,8                     | 87,5                     |
| Butan           | $\text{C}_4\text{H}_{10}$       | 76,5                     | 76,5                     |
| Äthylenoxyd     | $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}$  | 96,5                     | —                        |
| Methylchlorid   | $\text{CH}_3\text{Cl}$          | 111,7                    | 110                      |
| Vinylchlorid    | $\text{C}_2\text{H}_3\text{Cl}$ | 109                      | —                        |
| Äthylchlorid    | $\text{C}_2\text{H}_5\text{Cl}$ | 103,7                    | 105                      |
| Acrylnitril     | $\text{C}_2\text{H}_3\text{CN}$ | 71,0                     | —                        |
| Trichloräthylen | $\text{C}_2\text{HCl}_3$        | 131,0                    | —                        |

Die Übereinstimmung ist befriedigend; auch hier handelt es sich um Mittelwerte aus nur drei Meßreihen. Vergleichsgas war in diesem Falle  $\text{CO}_2$ .

Alle hier angegebenen Werte sind bei einer Temperatur des Thermostaten von  $20^\circ\text{C}$  und bei einer Temperaturdifferenz  $\Theta = 20^\circ$  gemessen worden. Die mittlere Temperatur betrug also  $30^\circ$ , und für diese gelten allein den Tabellen aufgeführten Werte. Durch Änderung der Thermostatentemperatur lassen sich ohne weiteres die gesuchten Größen auch für andere Temperaturen bestimmen.

#### Durchführung einer Bestimmung von $C_p$ , $\eta$ und $\lambda$ .

Da die Überlegungen, welche als Grundlage der neuen Methode dienen, etwas ungewohnt sind, wurden sie ausführlich wiedergegeben. Um nun zu zeigen, wie überaus einfach die ganze Methode ist, wird

$\lambda$ -Werten an und nimmt mit größer werdendem  $\lambda$  ab. In einem ziemlich großen Gebiet mittleren Wärmeleitvermögens, d. h. auch mittleren Molekulargewichtes, sind die  $Pr$ -Werte konstant. Vgl. dazu auch S. 34.

im folgenden eine Bestimmung der drei gesuchten Größen für  $\text{N}_2$  mit  $\text{CO}_2$  als Vergleichsgas durchgeführt, und zwar an Hand der Abb. 5 und 6. Die Numerierung der einzelnen Schritte entspricht den Nummern der Abschnitte Seite 36 u. 37.

1. Messungen der in  $\text{N}_2$  von einem Draht der Länge  $L = 7,2$  cm bei einer Erwärmung desselben um  $30^\circ$  über die Außentemperatur ( $20^\circ$ ) abgegebene Energie ergaben die Kurve in Abb. 5. Der Wendepunkt (vgl. die in vergrößertem Maßstabe dargestellten Werte bei kleinen Drucken) liegt bei  $Q = 0,0615$  Watt.

2. Als Vergleichsgas dient  $\text{CO}_2$ . Entsprechende Messungen ergaben Abb. 6. Hier liegt der Wendepunkt bei  $Q_0 = 0,0405$  Watt.

3. Nach (10) bzw. (10a) ist  $\lambda = \lambda_0 Q/Q_0$ . Da aus Tabellenwerken zu entnehmen ist, daß  $\lambda_0 = \lambda_{\text{CO}_2} = 0,40 \cdot 10^{-4}$  ist, ergibt sich

$$\lambda = 0,4 \cdot 10^{-4} \frac{0,0615}{0,0405} = 0,608 \cdot 10^{-4} \text{ cal} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$$

4. Bei den (beliebig gewählten) Drucken 500 mm und 700 mm  $\text{Hg}$  entnimmt man den Abb. 5 u. 6 die folgenden Werte von  $Q$  (in Watt):

| Gas           | $Q$ (500) | $Q$ (700) |
|---------------|-----------|-----------|
| $\text{N}_2$  | 0,0838    | 0,0888    |
| $\text{CO}_2$ | 0,0623    | 0,0660    |

Aus Gl. (2a) folgt mit den oben angegebenen Werten der Konstanten des Drahtes <sup>1</sup>:

$$Nu = \frac{Q \cdot l \cdot 0,239}{\lambda \cdot F \cdot \Theta} = \frac{Q \cdot 0,239}{\lambda \pi L \Theta} = \frac{Q \cdot 0,239}{\lambda \pi \cdot 7,2 \cdot 30} = \frac{Q}{\lambda} 0,000352.$$

Mit Einsetzen der Werte von  $\lambda$  aus Abschnitt 3 und den eben angegebenen Werten von  $Q$  für 500 mm und 700 mm Druck folgen für  $Nu$  die Werte:

| Gas           | $Nu$ (500) | $Nu$ (700) |
|---------------|------------|------------|
| $\text{N}_2$  | 0,485      | 0,514      |
| $\text{CO}_2$ | 0,548      | 0,581      |

Zu diesen  $Nu$ -Werten entnimmt man Abb. 2 folgende Werte von  $Gr \cdot Pr$ :

| Gas           | $Gr \cdot Pr$ (500)  | $Gr \cdot Pr$ (700)  |          |
|---------------|----------------------|----------------------|----------|
| $\text{N}_2$  | $7,6 \cdot 10^{-4}$  | $14,5 \cdot 10^{-4}$ | $\alpha$ |
| $\text{CO}_2$ | $29,3 \cdot 10^{-4}$ | $54,5 \cdot 10^{-4}$ | $\beta$  |

Der Quotient aus  $\alpha$  und  $\beta$  ergibt nach (6a) den Wert von  $A_m$ . Es folgt  $A_m = 0,260$  (bei  $p = 500$  mm  $\text{Hg}$ ) und  $A_m = 0,266$  (Bei  $p = 700$  mm  $\text{Hg}$ ). Als Mittelwert wird im folgenden  $A_m = 0,263$  benutzt <sup>2</sup>.

5. Mit diesem Werte von  $A_m$  erhält man aus Gl. (9) bzw. (9a) sofort den Wert von  $C_p$ . Der Wert von  $C_p$  ist aus Tabellen zu entnehmen:  $C_p(\text{CO}_2) = 8,9$

$$C_p \frac{\lambda}{\lambda_0} \sqrt{A_m} = C_p = 8,93 \frac{0,0615}{0,0405} \sqrt{0,263} = 6,96.$$

<sup>1</sup> Der Faktor 0,239 ist notwendig, weil  $\lambda$  in  $\text{cal} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$  gerechnet ist,  $Q$  aber in Watt angegeben wurde.

<sup>2</sup> Durch Benutzung mehrerer  $Q$ -Werte bei verschiedenen Drucken läßt sich dieser Mittelwert noch genauer festlegen.

Um  $\eta$  aus Gl. (8) zu ermitteln, muß noch der Wert von  $a$  festgelegt werden. In Abb. 7 ist  $Pr$  benannt auf  $Pr(\text{CO}_2) = 1$  als Funktion von  $\lambda/\lambda_{\text{CO}_2}$  angetragen. Der letztgenannte Quotient ist hier 1,52. diesem Wert als Abszisse entnimmt man aus Abb. 7 den Wert von  $Pr/Pr_0 = a = 0,932$ . Mit ihm dem oben bestimmten Wert von  $A_m = 0,263$  aus Gl. (8), wenn  $\eta(\text{CO}_2)$  aus Tabellen mit  $10^{-6}$  entnommen wird,

$$\eta_0 \frac{\mu}{\mu_0} \cdot a \sqrt{\frac{1}{A_m}} = 152 \cdot 10^{-6} \frac{28}{44} \cdot 0,932 \sqrt{\frac{1}{0,263}} = 176 \cdot 10^{-6}.$$

ergeben sich also für  $\text{N}_2$  folgende Werte (die nach Tabellenwerken wahrscheinlichsten Werte sind in Klammern angegeben):

|                         |                          |  |
|-------------------------|--------------------------|--|
| $= 6,96$                | (6,95)                   | $\text{cal} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$                      |
| $= 176 \cdot 10^{-6}$   | (179,5 $\cdot 10^{-6}$ ) | $\text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1}$                          |
| $= 0,608 \cdot 10^{-4}$ | (0,63 $\cdot 10^{-4}$ )  | $\text{cal} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ |

sind also die Werte, die sich aus einer einzigen Messreihe ergeben. Ihre Genauigkeit läßt sich durch Wiederholungen und mehr Ablesungen aus den Kurven noch merklich erhöhen.

## Wärmeübergang in Flüssigkeiten unter Wirkung elektrischer Felder.

Von HERMANN SENFTLEBEN, Recklinghausen.

(Vorläufige Mitteilung.)

(Eingegangen am 24. Oktober 1952.)

Der Wärmeübergang von festen Körpern in Flüssigkeiten oder Gase wird, wie seit einer Reihe von Jahren bekannt ist [1], durch elektrische Felder stark beeinflusst. — Während bei Gasen die Verhältnisse weitgehend geklärt sind [2], ist dies bei Flüssigkeiten trotz der ganzen Reihe von Arbeiten noch nicht der Fall [3].

a. Bei Flüssigkeiten mit sehr geringer Leitfähigkeit (innerhalb  $10^{-13} \text{ Ohm}^{-1} \text{ cm}^{-1}$ ), z. B.  $\text{CCl}_4$ , ist durch bisher nicht veröffentlichte Untersuchungen des Verfassers eine Deutung der Beobachtungen, auch in quantitativer Hinsicht, möglich. Hier sind die Effekte, die in einer Zunahme des Wärmeübergangs bei Einwirkung des Feldes bestehen, in derselben Weise zu deuten wie bei Gasen, nämlich durch Strömungen, welche durch Druckdifferenzen entstehen, deren Ursache die durch das Feld bewirkte Elektroosmose ist. Dieser Effekt ist daran gebunden, daß es keine freie, d. h. Auftriebsströmung an der heißen Wand vorhanden ist, und er verschwindet, wenn die Versuchsanordnung so getroffen wird, daß diese Strömung nicht ausbilden kann. Dann wird der Wärmeübergang nur durch Wärmeleitung bewirkt, und der Einfluß des elektrischen Feldes wird sehr klein <sup>1</sup>.

b. Nach Klärung dieser Verhältnisse wurden die Untersuchungen auf Flüssigkeiten ausgedehnt, deren

Nur der geringe Einfluß des elektrischen Feldes auf das molekulare Wärmeleitvermögen von Flüssigkeiten (noch nicht veröffentlicht) und Gasen [4], der gegenüber den andern hier behandelten Wärmeeffekten vollständig zu vernachlässigen bleibt auch ohne Strömung bestehen.

### Zusammenfassung.

Es wird eine Methode beschrieben, die auf Grund sehr einfach auszuführender Messungen der von einem erwärmten Draht in verschiedenen Gasen abgegebenen Wärmemenge die Konstanten des Gases ( $C_p$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$ ) zu bestimmen gestattet. Als Beispiel wird eine Messung der Konstanten von Stickstoff (auf Kohlendioxyd als Vergleichsgas bezogen) im einzelnen durchgerechnet. Dabei tritt die Einfachheit und gleichzeitig die Genauigkeit der Methode, welche schon bei einer einzigen Meßreihe nur Fehler von wenigen Prozenten zuläßt, hervor.

Die vorliegende Arbeit wurde in den *Chemischen Werken Hüls* durchgeführt. Der Werksleitung, vor allem Herrn Direktor Professor Dr. BAUMANN, danke ich für die großzügige Unterstützung.

Auch der Deutschen Forschungsgemeinschaft bin ich für die Bereitstellung von Mitteln zu großem Dank verpflichtet. Recklinghausen, den 1. 8. 1952.

**Literatur.** [1] SENFTLEBEN, H. und H. GLADISCH: Z. f. Phys. **125** 653 (1949). — [2] SENFTLEBEN, H.: Z. angew. Phys. **3** 361 (1951). Dort nähere Angaben. — [3] NUSSELT, W.: Gesundheitsing. **38** 477 (1915). — [4] SENFTLEBEN, H. und H. GLADISCH: Z. Phys. **125** 629 (1949). — [5] SMOLUCHOWSKI, M. v.: Sber. Akad. Wiss. Wien **108** IIa, 5 (1899).

Prof. Dr. H. SENFTLEBEN,  
Recklinghausen, Cäcilienhöhe 120.

Isolationsvermögen zwar noch so groß ist, daß man elektrische Felder ohne Schwierigkeit und ohne merklichen Stromübergang aufrecht erhalten kann, deren Leitfähigkeit aber doch wesentlich größer (um Zehnerpotenzen) ist als die der erwähnten Flüssigkeiten oder die der Gase. Hier wurde ein starker Einfluß des elektrischen Feldes nachgewiesen, auch wenn keine Strömung vorhanden war. Er besteht in einer beträchtlichen Zunahme des Wärmeübergangs. Mit einer einfachen Versuchsanordnung kann er demonstriert werden. Läßt man eine geeignete Flüssigkeit, z. B. Dieselöl, zwischen zwei konzentrischen Metallzylindern, die voneinander elektrisch isoliert sind, hindurch fließen, und erhitzt man den inneren Zylinder elektrisch oder thermisch, so wird das fließende Öl beim Austritt eine höhere Temperatur haben als beim Eintritt in den Zylinderzwischenraum. Bringt man nun die beiden Zylinder auf verschiedene elektrische Spannung, erzeugt man also zwischen ihnen ein elektrisches Feld, so steigt die Temperatur des austretenden Öls beträchtlich, d. h. die Wärmeabgabe des inneren erhitzten Zylinders ist größer geworden. Bei Feldern von etwa 5000 Volt/cm, die ohne Schwierigkeit mit relativ niedrigen Spannungen zu erzielen sind, kann die Wärmeübergangszahl auf das Zwei- bis Dreifache des Wertes ohne Feld steigen, ohne daß damit die Grenze der Erhöhung gegeben ist. — In vielen Fällen ist zum Erzeugen des Feldes Wechsel-Spannung verwendbar; es gibt aber auch Flüssigkeiten, die einen stark polaren Effekt zeigen, d. h. der Feldeinfluß ist verschieden groß, je nachdem das Feld in Richtung des Wärme-

stroms oder ihm entgegen gerichtet ist. In diesen Fällen ist es notwendig, Gleichspannung zu verwenden.

c. Alle bisher erwähnten Einflüsse des elektrischen Feldes betreffen eine Zunahme des Wärmeübergangs; es sei aber darauf hingewiesen, daß u. U. auch eine Abnahme der Wärmeabgabe eines erhitzten Körpers durch Einwirkung eines elektrischen Feldes beobachtet wird. Diese bleibt aber im allgemeinen kleiner als der oben beschriebene Effekt.

Über eine physikalische Deutung der unter b und c mitgeteilten Beobachtungen kann noch wenig gesagt werden. Möglicherweise hat man es bei der starken Zunahme des Wärmeübergangs mit analogen Effekten zu tun, wie sie bei der Zähigkeit von Flüssigkeiten unter der Wirkung elektrischer Felder beobachtet worden sind [5]. Bei vielen Flüssigkeiten wurde nämlich im Felde eine beträchtliche Erhöhung der Zähigkeit festgestellt. Die zur Zeit wahrscheinlichste Deutung dieser Erscheinung ist die, daß durch wandernde Ionen bzw. Ionenkomplexe Impuls (im Falle des Wärmeübergangs würde es Energie sein) übertragen wird. In die gleiche Richtung weisen auch die von HOFMANN [6] mit einer Schlierenapparatur beobachteten Bewegungen von Flüssigkeiten in elek-

trischen Feldern. Genaueres kann erst durch weitere Untersuchungen, die zur Zeit im Gange sind, festgestellt werden.

Diese Untersuchungen werden in den *Chemischen Werken Hüls* durchgeführt. Der Werksleitung, vor allem Herrn Direktor Professor Dr. BAUMANN, sowie der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die mir zuteil gewordene Unterstützung.

#### Zusammenfassung.

Es werden Beobachtungen über eine starke Beeinflussung des Wärmeübergangs in einigen Flüssigkeiten durch die Einwirkung elektrischer Felder mitgeteilt.

**Literatur.** [1] SENTFLEBEN, H. und W. BRAUN: Z. Physik 102, 480 (1936). — [2] SENTFLEBEN, H. und H. GLADISCH: Physik 126, 289 (1949). — [3] desgl. S. 309. — KRONIG, R. und N. SCHWARZ: Appl. Sci. Res. A 1, 35 (1947). — KRONIG, R. und G. ASHMANN: Appl. Sci. Res. A 2 (1949). — ASHMANN, G. und R. KRONIG: Appl. Sci. Res. A 2, 235 (1950) und A 3, 83 (1951). [4] SENTFLEBEN, H.: Phys. Verh. S. 50 (1950). — [5] CALKE, J. v. und B. AUBKE: Z. Physik 131, 443 (1952). (Dort Literaturzusammenstellung.) — [6] HOFMANN, R.: Z. Physik 87, 759 (1934).

Prof. Dr. H. SENTFLEBEN,  
Recklinghausen, Cäcilienhöhe 120.

## Buchbesprechungen.

**Palm, A.: Elektrische Meßgeräte und Meßeinrichtungen.** Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1948. 284 S. und 232 Abb. Geb. DM 24.—.

Ausgehend von Begriffsbestimmungen und Vorschriften des VDE werden im ersten Teil die verschiedenen Arten elektrischer Meßgeräte, im zweiten elektrische Meßverfahren behandelt. In die vorliegende dritte Auflage wurden die Abschnitte Elektrizitätszähler und Meßeinrichtungen mit Elektronenröhren neu aufgenommen. Hervorzuheben sind ferner die Tafeln mit zusammenfassenden Angaben über elektrische Meßgeräte. — Der Wert des Buches besteht darin, daß Verf. nicht nur das Wesentliche klar herausarbeitet, sondern auch auf Grund seiner langjährigen praktischen Erfahrung auf viele Einzelfragen hinweist, die für die Konstruktion eines Meßgerätes wichtig sind. Bei einigen Abschnitten würde der Physiker eine quantitativere Fassung begrüßen. Für seine experimentelle Arbeit, insbesondere beim Bau von Meßinstrumenten oder bei der Auswahl geeigneter Meßverfahren, kann er dem Werk jedoch wertvolle Anregungen entnehmen.

W. WAIDELICH.

**Dillenburger, W.: Aufbau und Arbeitsweise des Fernsehempfängers.** Berlin: Fachverlag Schiele & Schön 1952. 232 S. u. 136 Abb. Halbl. DM 10.80.

Nach einer kurzen Einführung, in der die Prinzipien einer Bildübertragung in übersichtlicher, knapper Formulierung ohne Voraussetzung spezieller Kenntnisse dargestellt werden, wendet sich der Hauptteil des Buches vornehmlich an solche Leser, denen die Probleme der Rundfunktechnik geläufig sind und die sich nun zusätzlich über die Besonderheiten des Fernsehempfanges eingehender informieren möchten. Ausführlich werden die 15 prinzipiellen Stufen eines Fernsehempfängers, vom Antennendipol bis zur BRAUNschen Röhre, vor allem auch die Schaltungstechnik der Verstärkerteile sowie die Kippgeräte behandelt. Störungen des Fernsehempfanges sind durch eine Reihe instruktiver Fernsehbilder erläutert.

Die Abschnitte über Planung und Aufbau eines Fernsehempfängers richten sich in erster Linie an Funktechniker und Entwicklungsingenieure, die sich in den nächsten Jahren in zunehmendem Maße mit Fernsehgeräten zu befassen haben werden. Die Schalt- und Dimensionierungsbeispiele sind

wohl mehr zur Erleichterung des allgemeinen Verständnisses denn als Rezepte zum Nachbau gedacht.

Eine reiche Auswahl meßtechnischer Methoden führt vielleicht ein wenig zu elementar beginnend — bis zum Aufbau gleich eines vollständigen Fernsehempfängers. Auch hier handelt es sich natürlich um spezielle Beispiele. Denn solange die Entwicklung der Fernsehgeräte noch nicht standardisiert ist, gibt es häufig mehrere gleichwertige Wege zur Schaltung und Aufbau. Dem Konstrukteur bleibt damit ein weiterer Spielraum und darum ist es um so wichtiger, daß er über eine möglichst breite Basis seiner Spezialkenntnisse verfügt. Hierzu wird das DILLENBURGERSCHE Buch, das aus der Fülle technischer Einzelheiten immer wieder auf die physikalischen Grundlagen zurückführt, ein ausgezeichnetes Helfer sein können.

H. AUER.

**Pawlek, Fr.: Magnetische Werkstoffe.** Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1952. VII, 303 S. u. 270 Abb. Geb. DM 42.—.

Das Buch will nicht eine Theorie des Ferromagnetismus sondern eine erschöpfende Übersicht über die Eigenschaften magnetischer Werkstoffe geben. Auch als ordnendes Prinzip ist die Theorie wenig benützt, atomtheoretische Ausführungen sind nur gelegentlich eingestreut, diese Teile wird man mit dem Stoff etwas vertraute Leser verstehen. Das Buch beginnt mit den Werkstoffen für Dauermagnete. Der nächste Abschnitt behandelt das Gegenteil, die magnetischen weichen Materialien. In einer sehr großen Zahl von Diagrammen sind die Eigenschaften in Abhängigkeit von der Zusammensetzung graphisch dargestellt. Die nächsten Abschnitte behandeln die Eigenschaften der Masskerne und der hochmagnetischen Ferrite. Über den Kreis der Elektriker hinaus interessieren die Werkstoffe mit besonderen mechanischen Eigenschaften auf verborgenen magnetischen Vorgängen beruhenden Eigenschaften. Von großer Wichtigkeit für den Praktiker sind im letzten Kapitel behandelten nichtferromagnetischen Eisenlegierungen. Das Buch ist eine Fundgrube für die Auswahl der richtigen Werkstoffe für Hoch- und Niederfrequenz für Stark- und Schwachstrom und für feinere mechanische Apparaturen, es ist für jeden Physiker und Ingenieur, die in diesen weiten Gebieten arbeiten, ein unentbehrliches Nachschlagewerk.

G. Joos